

32018年國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2018年4月11日 08:10-12:10

- 1、本試題共五大題，每一題20分，合計100分。
- 2、考試時間四小時。
- 3、限以藍色或黑色原子筆作答。
- 4、在指定的答案紙上作答。
- 5、可使用無程式掌上型計算機。

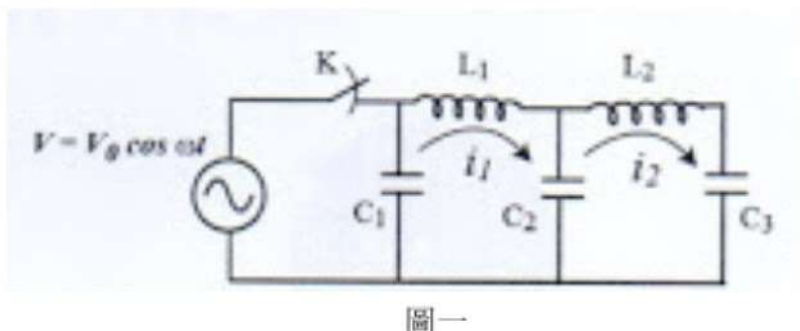
2018年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有五大題，每一題20分，合計100分。

1、LC並聯之交流電路

考慮圖一所示LC並聯之交流電路，設 $L_1=L_2=L$, $C_1=C_2=C_3=C$ 。開關K閉合時接通正弦波交流電源，其電流陣幅不變，頻率可調。

- (A) 開關K閉合前，求此電路 L_1 L_2 C_1 C_2 C_3 之固有振盪頻率。
 (B) 電容 C_1 與 C_2 之電荷預設為 i_{10} 及 i_{20} 。若要使電路在某一固有頻率振盪，說明 i_{10} 及 i_{20} 之初始關係。
 (C) 開關K閉合，此LC並聯電路可類比為力學系統中彈簧與質點的強迫耦合振盪，繪出對應力學系統彈簧與質點的組合方式。
 (D) 假設開關K閉合前電路中電流，電壓為零。計算K閉合後電容 C_3 兩端之電壓。



二、固體中的粒子

固體的特性基本上是量子現象，然而借用古典物理的一些概念，有助於了解或解釋固體的一些特性如電性或光學性質。在具週期性原子排列的晶格結構的固體中，一個非常有用的資訊是 $\epsilon(\vec{k})$ 。 $\epsilon(\vec{k})$ 是固體中電子的色散關係(dispersion relation)或能帶結構，其中 $\vec{k}$ 是描述這個系統狀態的量子數，也是波向量；是電子處在狀態 $\epsilon(\vec{k})$ 時的能量 k 時的能量。以下(A)與(B)中，我們在一維系統中探討上面的概念。

- (A) 如果把電子看成是一個波包，則波包的群速 $v_k = \frac{d\omega}{dk}$ ； v_k 可以視為電子在固體中的速度。我們也借用物質波的概念 $\epsilon(k) = \hbar\omega$ ； $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 為 h 普朗克常數。若帶電荷 $-e$ 的電子在電場 E 中受力 $F = -eE$ ，試用牛頓力學的概念證明 $F = \hbar \frac{dk}{dt}$ 。

【註】：從(A)的結果，我們可以推論 $\hbar k$ 扮演了電子動量 p 的角色，與物質波的概念吻合。

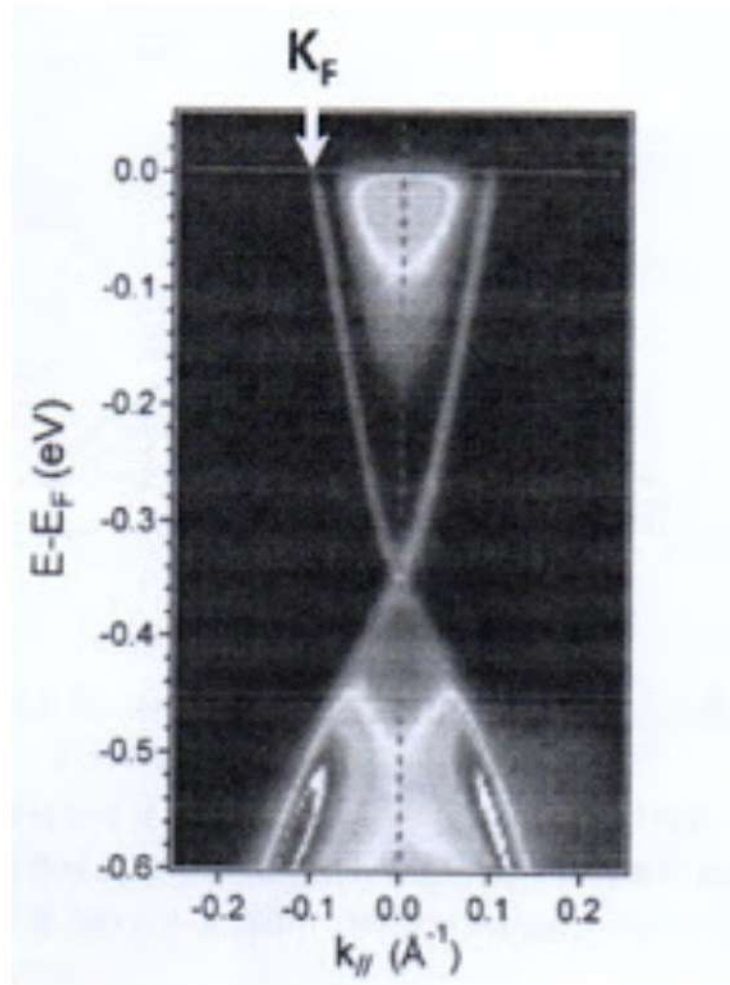
- (B) 若把電子的受力寫成牛頓第二定律的形式 $F = m^* a$ ，試求出 m^* 與 $\epsilon(k)$ 的關係。
 m^* 被稱作固體中電子的有效質量。

- (C) 圖二為鐵基超導體FeSe三維電子結構的計算結果。此空間為 $\vec{k}$ 空間，圖中近似圓柱側面為電子的等能量面。(在這個例子裏，此能量為費米能量。)設圓柱軸心為 k_z 方向，試推論此物質的電子的運動被拘限在 xy 平面。

- (D) 近年來，發現一些新物質中，電子的 $\epsilon(k)$ 如圖三。試申論在兩圓錐尖端交接處（狄拉克點）附近的電子靜止質量為零（設狄拉克點的 $\epsilon \equiv 0$ ）。這些粒子為相對粒子，稱為狄拉克費米子。
- (E) 如果整個狄拉克費米子態延伸至 k_F 。試估計在 k_F 狀態的狄拉克費米子的等效質量，並用自由電子的質量 m_e 表示。



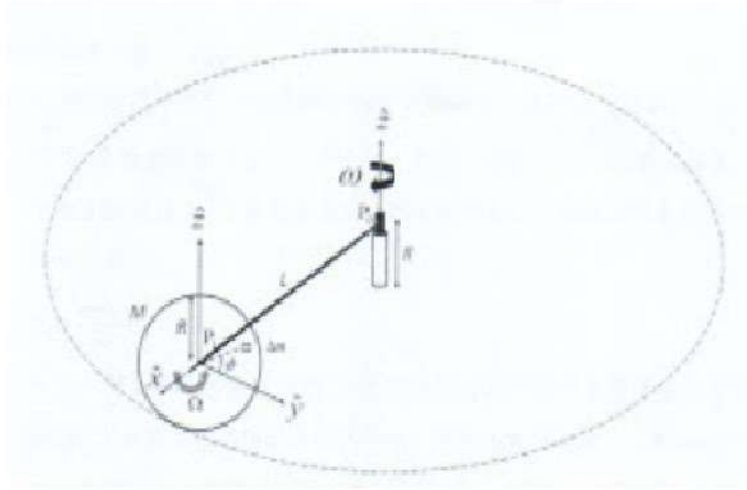
圖二 (from T. Terashima et al., Phys. Rev. **B** 90, 144517 (2014).)



圖三(此為拓樸絕緣體 Bi_2Se_3 的能帶結構)

三、圓盤與轉軸系統在桌面上的運動

考慮一圓盤與轉軸系統，圓盤的半徑為 R 質量為 M ，圓盤的質心位在圓盤的幾何中心(附圖 P_1)，圓盤轉軸長度為 L ，圓盤轉軸的一端為 P_1 ，另一端為 P_0 。圓盤的厚度遠小於 R 、 L ，故可忽略其影響；另圓盤的質量 M 遠大於圓盤轉軸的質量，故也忽略圓盤轉軸質量的影響。今將 P_0 固定在一個垂直的活動轉軸上(圓盤轉軸與垂直轉軸恆為直角關係)，垂直轉軸可在其基座中自由轉動，基座固定在水平的桌面上， P_0 離桌面的高度被基座固定為 R ，使得圓盤在桌面上滾動時，圓盤轉軸皆維持在水平方向上，且圓盤保持直立，圓盤與桌面接觸點的軌跡以虛線標示，如圖四所示。兩轉軸的轉動摩擦力皆可忽略。



圖四

圖四為圓盤與轉軸系統在某一瞬間的位置圖：圓盤恰在 y^z 平面上，圓盤轉軸恰在 $\hat{x}$ 方向， $\hat{z}$ 為垂直方向； $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$ 為與桌面相對靜止的座標矢量。

圓盤繞著圓盤轉軸轉動的角速度為 Ω (轉動方向如圖中灰色粗箭頭所示)，圓盤與轉軸系統繞著垂直轉軸轉動的角速度為 ω (俯視時為順時鐘轉動)，如圖四黑色粗箭頭所示。

試求圓盤中的一個小質量 Δm (以小方塊標示)相對於 P_0 的速度。 Δm 與 P_0 的距離為 r ，與 $\hat{y}$ 的夾角為 ϕ ，如圖四所示。

(A) 若圓盤的質量為軸對稱分佈，試求 Δm 對圓盤與轉軸系統動能的有效貢獻。

(B) 承上題，已知圓盤與轉軸系統的動能可表示為 $K = \frac{1}{2} I_s \Omega^2 + \frac{1}{2} I_n \omega^2$ 而 $I_s = \alpha_s MR^2$ ；若

定義 $I_n = \alpha_n MR^2$ ，試求 α_n 的表達式，以 α_s 、 L 與 R 表示之。

(C) 承上題，若圓盤與桌面之間無摩擦力，試求圓盤與桌面之間的作用力。

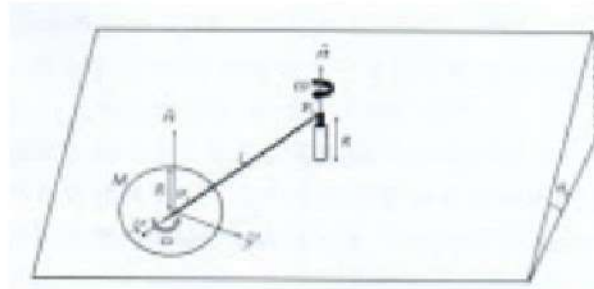
(D) 若圓盤與桌面之間的摩擦係數為 μ ，且已知在時間 $t = 0$ 時， $\Omega(t = 0) = \Omega_0$ 而

$\omega(t = 0) = 0$ ，試求圓盤與轉軸系統最後的 Ω 與 ω ，以 α_s 、 α_n 、 R 、 L 與 Ω_0 表示之。

(E) 試求圓盤與轉軸系統達到最後的 Ω 與 ω 時的時間 T 。

(F) 若圓盤與轉軸系統是在一個角度為 θ_0 的桌面上，如圖五所示，試求圓盤與轉軸系統

的小幅度擺動的週期 T_0 。此時圖五裡基座中活動轉軸的方向為 $\hat{n}$ ，與桌面垂直。



圖五

四、電磁波及重力波

(A). 已知加速運動中的帶電質點會輻射出電磁波，且其輻射功率 $P = \sum_{i=1}^3 \frac{k(\ddot{p}_i)^2}{3c^3}$ ，這

裡 k 是電力常數， p 為電偶極矩。考慮一個電荷為 $-e$ 的帶電質點，在 $x - y$ 平面上做半徑為 R 、角速度為 ω 的等速圓周運動，證明此帶電質點的電磁波輻射功率為

$$P = \frac{ke^2 R^2 \omega^4}{3c^3}。$$

(B). 考慮一個質量分別是 m_1 及 m_2 的雙星系統，假設此雙星皆可視為質點，兩者距離為 R ，且皆以角速度 ω 繞系統質心，作等速圓周運動。若 $R\omega \ll c$ ，且重力波極為微弱，由牛頓運動定律求 R ，以 G 、 M 、 ω 表示，這裡 $M = m_1 + m_2$ 。

(C). 承(B)小題，求這個系統的總力學能 E ，以 G 、 M 、 μ 、 ω 表示。

(D). 由廣義相對論知加速運動中的質點會輻射出重力波，且其輻射功率

$$P = \frac{G}{45c^5} \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^3 \ddot{q}_{ij}^2 \right) - \frac{\dot{q}^2}{3} \right\}，$$
 這裡 G 是重力常數， q 為質量四極矩

$$q_{ij} = \sum_{n=1}^N 3m_n \left\{ (X_n)_i (X_n)_j \right\}，q = \sum_{i=1}^3 q_{ii}，\vec{X}_n \text{ 為第 } n \text{ 粒子的位置向量。證明此系統}$$

的重力波輻射功率為 $P = \frac{32G\mu^2 R^4 \omega^6}{5c^5}$ ，這裡 μ 為雙星系統的縮減質量。

(E). 承(B)-(D)小題，若 $\omega^{-\alpha} \dot{\omega} = \beta$ ，其中 α 、 β 皆為常數，求 α 、 β 。

5、氣體液化的熱力學

氣體在大氣壓下可透過降溫而液化，成為流體。許多新的物理現象(如超流)是氣體液化後才被發現，以下探討氣體液化的熱力學問題。

(A) 假設液化機的作用為透過在兩個溫度間之操作，自氣體抽取熱量將它冷卻而液化，此過程為在固定壓力下，由室溫 T_0 開始操作，將 T_0 作為操作的高溫，而將氣體的溫度

做為操作的低溫，當氣體達到液化溫度 T_b (即液體的沸點)時，液化機可繼續操作將氣體完全液化。若氣體為一莫耳單原子氣體，可視為理想氣體，液化後之液體汽化熱為 L ，試求將此一莫耳單原子氣體完全液化至少所需要作的功。已知在大氣壓下，液態氦(^4He)的沸點為4.18K，汽化熱為0.082J/mole，一莫耳之體積為32cm³/mole，估計由室溫300K開始液化一莫耳氦氣至少所需做的功(以千瓦小時/升(kWh/litre)表示)。(莫耳氣體常數 $R=8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$)

- (B)絕大多數用以液化氣體的方式都是透過膨脹(或蒸發)使氣體降溫，然而當到達沸點時，膨脹會使部分氣體液化，亦造成機械問題(如管線阻塞)造成繼續膨脹的操作不易。因此近代液化氣體的膨脹使用所謂的焦耳-湯生膨脹(Joule-Thomson expansion)方式進行，如下圖所示，讓氣體以高壓推動強迫通過膨脹閥或多孔區間，在此過程中，膨脹閥與外界絕熱且不吸收或放出熱量，而氣體通過膨脹閥或多孔區間前後的壓力固定(各為 P_1 與 P_2 且 $P_2 < P_1$)，且體積膨脹 $V_1 < V_2$ ，以下探討以此方式液化氣體的熱力學。

(i)試求單原子理想氣體通過焦耳-湯生膨脹閥前後之溫度差與膨脹前溫度之比值。

(ii)理想氣體方程式因為沒有考慮分子的大小與分子間之作用，因此無法描述氣體的液化。而凡德瓦方程式推廣理想氣體方程式可用以描述液態：

$(P + \frac{N^2}{V^2}a)(V - Nb) = Nk_B T$ ，其中 P 、 V 、 T 與 N 為氣體的壓力、體積、溫度與分子數，而 a 、 b 為正的常數，分別用以描述壓力與體積的修正。試求加入壓力修正後(即 a 的修正)之單原子氣體的內能 U ，並由此求出在精確到 a 與 b 一次項，通過焦耳-湯生膨脹閥之單原子氣體膨脹前後的溫度差(以膨脹前後體積 V_1 、 V_2 及膨脹前溫度 T_1 表示)。由此推論當進入焦耳-湯生膨脹閥之氣體的溫度低於某一溫度 T_{inv} (稱為反轉溫度)時，通過膨脹閥後必定降溫，而通過前氣體溫度高於 T_{inv} ，通過膨脹閥後則必定升溫，若氦氣的

$N_A^2 a = 0.00346 \text{ J m}^3 / \text{mol}^2$ ， $N_A b = 0.0238 \text{ m}^3 / \text{kmol}$ (N_A 為亞佛加厥數)，液態氦體積以 $3N_A b$ 估計，利用 a 、 b 與大氣壓力下液氦之沸點4.18K，估計一莫耳氦氣定壓(大氣壓力)下液化的潛熱(汽化熱) L 與反轉溫度 T_{inv} 。

- (C)圖六所示為利用焦耳-湯生膨脹液化氦氣之裝置示意圖。氦氣由熱交換處以溫度 T_{in} 、壓力 P_{in} 送進焦耳-湯生膨脹閥後，部分氦氣液化，未液化的氣體則回流經過交換處與進入的氣體交換熱量達溫度 T_{in} 、壓力 P_{out} ，再送往前置冷卻系統處降溫



圖六

再進入熱交換處進行下一個循環的液化。

利用(b)所得之汽化熱，試求一莫耳氦氣經由熱交換機通過焦耳-湯生膨脹閥回到熱交換機一次循環中被液化的莫耳數 λ (以 L 、 P_{out} 、 P_{in} 、 T_{in} 、 T_b 、 $N_A^2 a$ 、 $N_A b$ 與液氦的沸點 T_b 表示)。已知 $T_{in} = 15\text{K}$ ， $P_{in} = 10\text{atm}$ ， $P_{out} = 1\text{atm}$ ，氦的沸點為4.18K，試估計欲由2莫耳氦氣得到一莫耳液態氦約需經過幾次循環。