

2018年國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2018年4月10日 08:10-13:10

- 1、 本試題共三大題，每大題50分，總分150分。
- 2、 答卷時間五小時。
- 3、 限以藍色或黑色原子筆作答。
- 4、 在指定的答案紙上作答。
- 5、 在每題開始時換用新頁。
- 6、 在每一頁答案紙的頂端寫明：
 - . 題號
 - . 該題所用答案紙之頁碼
 - . 該題所用答案紙的總頁數例(以第一題用了三頁紙為例):
 - 1 1/3
 - 2 2/3
 - 3 3/3

2018年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試

決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題50分，總分150分。

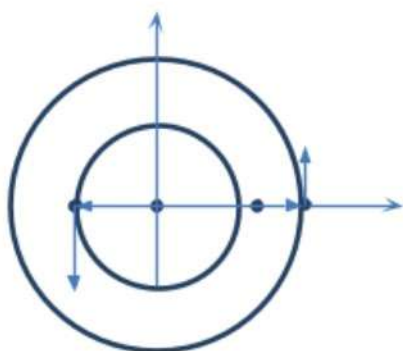
一、雙星系統的爆炸

如附圖所示，考慮最初繞靜止之質心O作圓周運動的雙星系統，並將O取為座標系原點，以 m_1 、 r_1 、 v_1 與 m_2 、 r_2 、 v_2 分別代表兩星球之質量、位置向量、速度向量，以

$m \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ 、 $r \equiv r_2 - r_1$ 、 $v \equiv v_2 - v_1$ 分別代表系統的約化質量、相對位置向量、相對速度向量。

假設質量為 m_1 的星球於瞬間爆炸，以致其質量只剩 qm_1 ($0 \leq q < 1$)，而爆炸射出之質量，其分布相對於該星呈球形對稱，並於瞬間完全離開雙星系統至無窮遠處(即可忽略其對雙星系統的重力作用); 另一顆星則完全不受爆炸之影響。

爆炸後雙星繼續在彼此的重力作用下運動，爆炸後之系統質心O'的位置向量以R表示，而在爆炸後瞬間連接OO'之直線被取為x軸。



注意:以下各題之答案，除非該題另有規定者外，一律以上述參數 m_1 、 m_2 與 q 表示。

A部分(爆炸後的相對運動)

(A)若爆炸後雙星系統變為非束縛系統， m_1 、 m_2 與 q 之間須滿足的條件為何？

B部分(半長軸)

(B)爆炸後雙星之相對運動軌道，其半長軸 a 與爆炸前圓軌道半徑 a_0 之比為何？

C部分(角動量)

(C)爆炸後相對運動的角動量量值 l' 與爆炸前相對運動的角動量量值 l_0 之比為何？

D部分(軌道面積掃掠速率)

(D)爆炸後軌道面積掃掠速率 $\dot{A}'$ 與爆炸前的面積掃掠速率 $\dot{A}_0$ 之比為何？

E部分(週期)

(E)爆炸後軌道運行週期 T' 與爆炸前的軌道運行週期 T_0 之比為何？

F部分(離心率)

(F)爆炸後系統相對運動的軌道，其離心率 e 為何？

G部分(爆炸後雙星的速度)

假設如最初題幹所述，以O為原點，以OO'為x軸，並以 θ 代表相對位置向量 $r \equiv r_2 - r_1$ 與x軸的夾角。

(G)在爆炸後， m_1 與 m_2 兩星相對於O的速度向量 u_1 與 u_2 各為何？答案以夾角 θ 及爆炸前之速率 v_1 與 v_2 表示。

H部分(雙星彼此間之距離為無窮遠時相對位置向量的方向)

(H)在爆炸後，當兩星相距無窮遠時，其相對位置向量 $r = r_2 - r_1$ 與x軸的夾角 ϕ 的餘弦

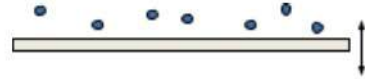
$\cos \cos \phi$ 為何?

I部分(雙星彼此間之距離為無窮遠時的速度夾角)

(I)在爆炸後,當兩星相距無窮遠時,其速度向量 u_1 與 u_2 之夾角 ψ 的餘弦 $\cos \cos \psi$ 為何?

2、質點熱力學系統之模擬

振盪平板上彈跳小珠子之動力學與熱力學模擬
如圖所示,考慮小珠子在一個在鉛直方向上下振盪之平板上的彈跳運動,此系統可用以模擬質點系統的熱力學。試回答以下問題:



(A) 如右圖所示,考慮質量為 m 之單一個小珠子的彈跳運動,設平板的

振盪為單一頻率,在 t 時刻的位置為 $z = A \sin \sin \omega t$, 假設小珠子



與平板的碰撞為非彈性碰撞,恢復係數為 e :即若碰撞前小珠子速度為 u^- (以向上為正)、平板的速度為 v 與碰撞後小珠子速度為

u^+ , 則 $u^+ - v = -e(u^- - v)$ 。實驗上發現,適當選擇平板振幅與小珠子起始條件,小珠子可做週期運動,且週期與平板運動週期一致,試求此週期運動中碰撞時平板的速度 v (以 ω 、 e 與重力加速度 g 表示),並求此週期運動發生時振幅必須滿足的條件。

(B) 當平板速度大,小珠子的運動呈現沒有規律的混亂型(chaotic)運動,小珠子的運動與氣體中單一分子的運動相似。此時,若小珠子撞擊平板發生的時間為 t_c , 平板運動振盪的相位 $\Phi = \omega t_c$ 連續分佈在 0 與 2π 之間。

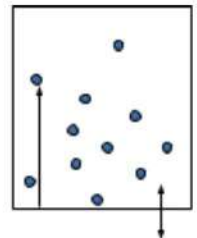
(i)要了解此相位的分佈,設時間為 t_0 時,小珠子相對平板的距離為振幅 A ,小珠子朝向平板運動後在 t_c 發生碰撞,碰撞時的入射速度為 $-u$ ($u > 0$), 平板速度為 $v(t_c)$, 假設 $u\omega \gg g$, 相位 $\Phi_0 = \omega t_0$ 均勻分佈在 0 與 2π 之間,即相位為 Φ_0 之機率密度為

$P(\Phi_0) = 1/(2\pi)$, 試求對固定的入射速率 u , 碰撞相位 Φ 發生的機率密度 $P_u(\Phi)$ (以 u 與 $v(t_c)$ 表示), 並由此求出固定入射速度下之平板速度的平均值 $\bar{v}$ 與入射速度 u 之關係。

(ii)小珠子每次碰撞時的位置皆不同,假設小珠子碰撞位置的平均是固定的,由此求出小珠子速度平方的平均值 $\langle u^2 \rangle$, 並由此求出小珠子運動的等效溫度。

(C) 接(A)與(B)小題,如右圖所示,考慮 N 個小珠子在平板上的3維彈跳

運動,小珠子的速度 $\vec{u}$ 不再侷限在鉛直方向。假設平板的面積為 Ω ,小珠子半徑為 r ,並且小珠子與牆、平板碰撞之非彈性損失可不計,但小珠子之間的碰撞為非彈性碰撞,恢復係數為 e 。由(b)小題分析可知, N 個小珠子的運動可以假設為一個等效溫度 T 之質點在重力場 g 下的熱平衡系統,小珠子的平均動能決定等效溫度 T ,因此可定義等效溫度為



$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m \langle |\vec{u}_i|^2 \rangle$, 其中 $\vec{u}_i$ 為第 i 個小珠子的速度。已知定溫下質點之

速率的平均值為 $\sqrt{\frac{(8k_B T)}{(\pi m)}}$, 平板做向上鋸齒形振盪, 平均速度 v (相當於 $A\omega$)滿足 $0 < v \ll u$ (u 為小珠子典型的速率), 且平板速度可視為與小珠子速度無關, 試回答以下問題:

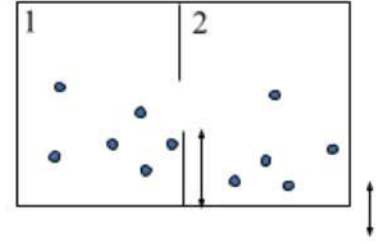
(i)設平板平衡位置之高度為 0 , 求在高度 h 之小珠子密度。

(ii)計算平板對小珠子系統的能量輸入功率(取平板速度最大項, 以 v 、 N 與 m 表示)。

(iii) 估算小珠子相互非彈性碰撞所造成的能量損失功率。

(iv) 等效溫度具有以下形式： $k_B T = B \left(\frac{\Omega}{N} \right)^2$ ，試求係數 t 。

(D) 接(C)小題，將小珠子彈跳的空間隔成相同的左右空間(標示1與2)如右圖所示。假設左右空間中間以一面積 S 、高 H 之小洞相連，試回答以下問題。



(i) 設某一瞬間左右空間小珠子的個數各為 N_1 與 N_2 ，則單位時間內由1跳到2的小珠子數具有以下形式：

$$F_{12} = \alpha n_1^2 e^{-\beta n_1^2}, \text{ 其中 } n_1 = \frac{N_1}{(N_1 + N_2)} \text{ 為空間1小珠子的個數所佔}$$

的比例。同理，單位時間內由2跳到1的小珠子數為 $F_{21} = \alpha n_2^2 e^{-\beta n_2^2}$ ，求 α 與 β (以 B 、 N 、 Ω 、 m 、 S 與 H 表示)。

(ii) 實驗上發現，當系統達穩定態時， N_1 與 N_2 的平衡值可以不相等，此現象被稱為馬克思威惡魔的表現，可用以模擬物質相變。試問用以上的結果，調整哪個參數(α 或 β)可以使 N_1 與 N_2 的平衡值不相等？求 N_1 與 N_2 的平衡值不相等參數的臨界值，並作

$n_k (k = 1, 2)$ 與控制參數的大致圖。

三、晶格中的繞射

(A) 考慮沿 $\hat{x}$ 方向的一維晶格，晶格週期長度為 a ，有波長為 λ 的平面波沿

$-\hat{z}$ 方向射向該一維晶格：

(a) 試求透射波在 xz 面上建設性干涉的方向，以波的方向與 $-\hat{z}$ 所形成夾角 θ_f 表示之。

(b) 試求以上建設性干涉波的波向量改變 $\Delta \vec{k} \cdot \hat{x} = (\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \hat{x}$ 。

$\vec{k}_i$ 為入射波的波向量， $\vec{k}_f$ 為入射波的波向量。

(B) 考慮二維晶格，如圖所示為碳原子所形成的單原子層蜂窩狀晶格結構，稱為石墨烯結構。晶格中每一個單元有兩個碳原子，圖中以A(黑圓點)B(白圓點)標示，晶格週期以向量 $\vec{a}_1$ 、 $\vec{a}_2$ 表示， $a = 1.23 \text{ \AA}$ ，圖中碳鍵(黑線條)之間的夾角皆為 120° 。

今以電子沿 $-\hat{z}$ 方向入射，考慮透射繞射情形。

- (a) 入射電子入射前先經過 1 kV 加速電壓的加速，試求電子的波長 λ 與波向量量質 k_i 。
- (b) 若石墨烯樣品由多個晶格區域構成，各晶格區域有各自的晶格方向，使電子在穿透石墨烯樣品後在成像處所形成的成像呈環狀干涉條紋，試求半徑最小的三個環狀干涉條紋的半徑。成像處與石墨烯樣品在 z 方向上的距離為 L ，約為毫米等級。
- (c) 若石墨烯樣品為單一品體，試描繪出上題中三個環狀條紋所對應的干涉亮點。
- (d) 承上題，試討論A與B原子對三組干涉亮點強度的影響。
- (e) 原子束半徑調至石墨烯樣品的大小(約為毫米等級)，若石墨烯樣品為單一品體，試描繪出干涉圖形。
- (f) 原子束半徑調至石墨烯樣品的大小(約為毫米等級)，若石墨烯樣品主要含有兩個晶格區域(如在銅(001)面上的石墨烯)，而兩個晶格區域的石墨烯晶向約有以 z 軸轉 15° 的角度差，試描繪出干涉圖形。

