

2019年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2019年3月30日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2019 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、旋轉中的馬鞍面

考慮空間中的固定座標系 S 及旋轉座標系 S' 。兩座標系的 z 軸重合，且 S' 以固定的角頻率 ω_0 相對於 z 軸旋轉。若令兩者的直角座標基底分別為 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 及 $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ ，則兩基底間的關係為：

$$\hat{x}' = \cos(\omega_0 t) \hat{x} + \sin(\omega_0 t) \hat{y},$$

$$\hat{y}' = -\sin(\omega_0 t) \hat{x} + \cos(\omega_0 t) \hat{y},$$

$$\hat{z}' = \hat{z}.$$

在 S 中質點的位置向量 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ，而在 S' 中質點的位置向量則為 $\vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$ 。由於 $\vec{r}' = \vec{r}$

$$\begin{cases} x' = \cos(\omega_0 t)x + \sin(\omega_0 t)y, \\ y' = -\sin(\omega_0 t)x + \cos(\omega_0 t)y, \\ z' = z. \end{cases}$$

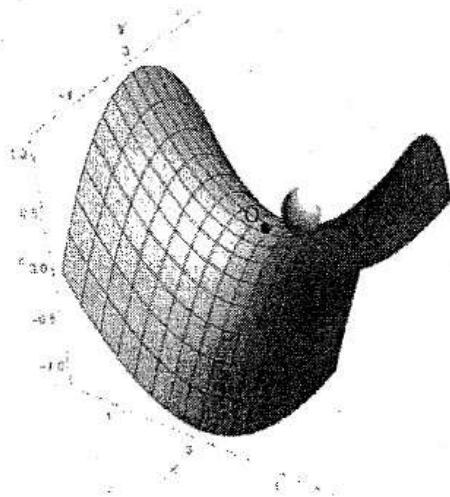


圖 1

(A) 證明在旋轉座標系 S' 中，牛頓運動定律需修改

為 $\vec{F}' = m\vec{a}'$ ，其中虛擬力

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega}_0 \times \vec{v}'.$$

註： $-m\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}')$ 為離心力， $-2m\vec{\omega}_0 \times \vec{v}'$ 為科氏力。

(B) 在旋轉座標系 S' 中，有一個靜止的馬鞍面滿足下列方程式：

$z' = A_0(x')^2 - B_0(y')^2$ 。如圖 1 所示，考慮質點在馬鞍面原點 O 附近的運動，證明質點的運動滿足下列方程式：

$$\begin{cases} m\ddot{x}'(t) - 2m\omega_0\dot{y}'(t) + m(2A_0g - \omega_0^2)x'(t) = 0; \\ m\ddot{y}'(t) + 2m\omega_0\dot{x}'(t) - m(2B_0g + \omega_0^2)y'(t) = 0. \end{cases}$$

(C) 令 $x'(t) = x_0 e^{-i\Omega t}$ ， $y'(t) = y_0 e^{-i\Omega t}$ ，證明 Ω 滿足下列方程式：

$$\Omega^4 + 2[(B_0 - A_0)g - \omega_0^2]\Omega^2 + \omega_0^4 + 2(B_0 - A_0)g\omega_0^2 - 4A_0B_0g^2 = 0.$$

(D) 若 $x'(t)$ 、 $y'(t)$ 只在原點附近作來回振盪，則此系統處於穩定狀態。令 $\Omega^2 = u$ ，則(C)小題的方程式可化簡為 u 的二次方程式。問 u 的兩個根要滿足什麼條件，才能確保此系統處於穩定狀態？

(E) 令 $B_0 = \alpha A_0$ ， $g = \Omega_0^2/A_0$ ， $\omega_0 = \sqrt{\beta}\Omega_0$ ，求 α 、 β 要滿足什麼條件，此系統才會處於穩定狀態？

二、雙生子謬論

雙胞胎 A 與 B 在慣性座標系統 S 的原點 O 處，B 登上飛船以速度 V 沿 $\hat{x}$ 方向離去並將迴轉後再回到 O 處(過程容後詳述)，而 A 則留在 O 處等候 B 回來，過程中 A 與 B 分別記錄自己經歷的時間，並約定在見面時作比較。等速離開的飛船為慣性座標系統 S' ，飛船為 S' 的原點 O' ，設飛船加速至 V 的時間可以不計，飛船離開時(即 $\hat{O}$ 與 O' 要分開時) A 與 B 的時間皆為零(即 $t=t'=0$)。已知在 S 慣性座標系統觀察兩個物理事件發生的時空點 (x_1, y_1, z_1, ct_1) 與 $(x_1, y_1, z_1, ct_1) + (\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t)$ ，該兩時空點之間的時空區間

$\Delta s^2 \equiv \sum_i \Delta x_i^2 - (c\Delta t)^2$ ，與 S' 慣性座標系統觀察相同兩個物理事件所對應的時空區間

$\Delta s'^2 \equiv \sum_i \Delta x_i'^2 - (c\Delta t')^2$ 應為相同。該兩個物理事件在 S' 慣性系統的時空點為

$(x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1)$ 與 $(x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1) + (\Delta x', \Delta y', \Delta z', c\Delta t')$ 。因此 S' 慣性系統與 S 慣性系統的時

空轉換關係 $x' = \gamma(x - \beta ct)$ ， $ct' = \gamma(ct - \beta x)$ ， $y' = y$ ， $z' = z$ 實為保證 $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ 的要求。

在此 $\beta = V/c$ ， $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ， c 是光速。

(A) 飛船與 B 在到了 $x=L$ 時迴轉，其在 S 慣性系統的速度從 $V\hat{x}$ 改變為 $-V\hat{x}$ ，設飛船速度改變所需的時間可以不計，此時 A 與 B 的時間分別為 t_0 與 t'_0 ，求 t_0 與 t'_0 的表達式。

(B) 在飛船速度改變為 $-V\hat{x}$ 後(即 $t' \geq t'_0$)，飛船是在 S'' 慣性座標系統中保持相對靜止，且

飛船的位置是在 S'' 的原點 O'' 處，求 S'' 與 S' 慣性座標系統的時空轉換關係。

(C) 求 S'' 與 S 慣性座標系統的時空轉換關係。並以此關係求 B 回到 O 點時(若 B 在 S'' 中的狀態維持不變)，B 所紀錄的時間。

(D) 當 S'' 中的時間達到 $t'_0/2$ 時，即 $t'' - t'_0 = t'_0/2$ 時，B 將飛船在 S'' 中的速度從相對靜止

改變為 $-V_0\hat{x}$ ($V_0 > 0$)，飛船速度改變所需的時間不計，求飛船抵達 O 點時 A 所紀

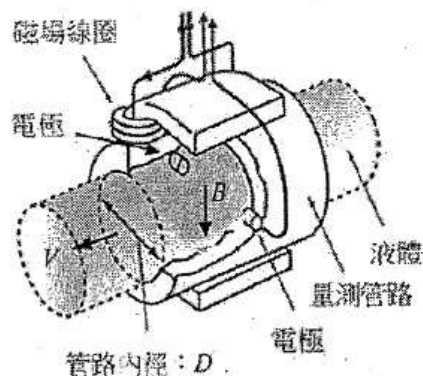
錄的時間 T 。

(E) 求飛船抵達 O 點時 B 所紀錄的時間 T' 。

(F) 試從時間膨脹的觀念計算出(D)的 T 與(E)的 T' 。

三、電磁流量計

電磁流量計可以量測導電流體的流量(單位時間流過的流體體積)，常用來量測血液在血管中的流速。它是由一個產生磁場的電磁線圈，及用以量測電動勢的兩個電極所構成，可如圖 2 所示架設於管路外來量測流量。



(A)若量測到的電動勢為 ε ，電磁線圈產生均強磁場 B ，管路內徑為 D ，則可推知平均流速 V 為何？(設流速不均與電極吸引所造成之電流均可忽略)

(B)比較此產生電動勢的現象與霍爾效應有何異同？

圖 2

法拉第曾於 1832 年企圖在泰晤士河觀察鹽水穿過地球磁場產生的電流，這也是利用法拉第電磁感應定律將流體動能或熱能轉換為電能的磁流發電的雛形。(magneto-hydrodynamic (MHD) power generation).

(C)假設流體的電導係數為 σ ，垂直磁場 B 的流速為 V ，證明應電流 I 和流速的關係為：

$I = \sigma V^2 B k (1 - k) a$ ，其中 a 為正方形電極板的邊長，定義負載參數 $k = \frac{E}{VB}$ ， E 為感應電場。

(D)已知地磁強度為 0.5 高斯，海水電導率為 5 S/m(mho/m)，若以邊長 0.254 m 的電極在海水流速 2 m/s 的狀況下，可能測到的最大電流為何？20 世紀初可量測的最小電流為 $20 \mu\text{A}$ ，據此說明法拉第泰晤士河實驗無法成功的原因？

(E)承(D)，利用海水磁流發電似乎不切實際，若已知其他條件控制不變時，海水流速 2 m/s，可產生電功率 $1.4 \mu\text{W}$ ，則海水流速至少須達多少，方能點亮 60W 的燈泡？現今，磁流發電是使用高溫電離的氣體。

四、越過台階的純滾動運動

- (A) 如圖 3 所示，一半徑為 R 、質量為 m 之實心均勻球體，中心以速度為 v ，向右朝一高 h 的台階做純滾動運動。假設球與台階接觸發生之碰撞為完全非彈性碰撞，即球上與 A 之接觸點的速度在碰撞後之瞬間速度為 0，試回答以下問題：

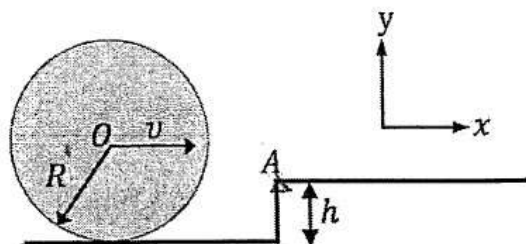


圖 3

- (i) 試求在球體與台階保持接觸的情況下，能夠使球體滾動越過台階的最小速度 v_{min} 。
- (ii) 試問球體在越過台階時能夠保持與 A 點接觸所允許的最大速度 v_{max} 。
- (iii) 接(i)小題，試求球體因碰撞所獲得的衝量 (I_x, I_y) 。

(設重力加速度為 g ，且已知球體對質心的轉動慣量為 $I_o = \frac{2}{5}mR^2$)

- (B) 接(A)小題，但將固定不動的台階換為一質量為 M 之木塊，如圖 4 所示。假設木塊與水平地面之摩擦可不計，且木塊與水平地面之間的碰撞亦為完全非彈性，設 θ 為球體與 A 點碰撞時 $\overline{OA}$ 與水平的夾角，即 $\sin \theta = \frac{R-h}{R}$ ，試回答

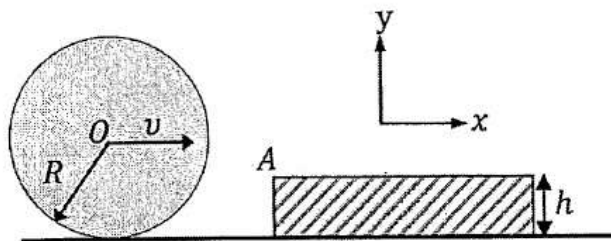


圖 4

以下問題：

- (i) 設碰撞後之瞬間木塊的速度為 $v_1 = \alpha v$ ，球體中心相對木塊的速度為 $v_2 = \beta v$ ，試求 α 與 β (以 I_o 、 m 、 M 與 θ 表示)。
- (ii) 試求在球體與木塊保持接觸的情況下，能夠使球體滾動達到木塊頂部的最小速度 v_{min} 。
(以 g 、 α 、 β 、 I_o 、 m 、 θ 、 R 、 h 與 M 表示)
- (iii) 試問球體在越過到達木塊頂部時能夠保持與 A 點接觸所允許的最大速度 v_{max} 。(以 g 、 α 、 β 、 R 與 h 表示)

五、柱體的彈性力學

一均勻的細長柱體，靜置於水平的光滑平面上，縱軸沿 x 方向，自然長度為 L ，橫截面積為 A ，質量為 $m = AL\rho$ (ρ 為密度)。本題中假設在柱體中出現的縱波，波長遠大於柱體的橫向尺寸，以致波前平行於 yz 平面(即波為平面波)。當柱體受到擾動時，在平衡態下座標為 x 的介質，會沿 x 方向出現微幅位移 $\xi(x)$ ，以致柱體中出現彈性回復力。

(A) 試求在 x 處的柱體介質因受到微幅擾動而出現的應變 $S(x)$ (應變的定義為每單位自然長度的伸長量)；答案可用位移函數 $\xi(x)$ 的導數表示。

(B) 假設以 $F(x)$ 代表柱體中在截面 x 處的介質所受到沿 $+x$ 方向的伸張力，且 $F(x)$ 均勻作用於該截面各部分，則每單位截面積受到的伸張力 $T(x) = F(x)/A$ ，稱為在截面 x 處的伸張應力。已知當應變足夠微小時，應力 $T(x)$ 與應變 $S(x)$ 成正比，而可用下式表示：

$$T(x) = YS(x) \quad (1)$$

上式中的比例常數 Y 稱為該柱體的伸張彈性模量，亦稱為楊氏係數。

假設柱體的左端固定於 $x = 0$ ，右端受到固定的水平伸張力 F_1 ，則在達到靜止平衡時，此柱體之長度的伸長量 ΔL 及其質心的位移 ΔX 各為何？此柱體的有效彈力常數 k 為何？

(C) 今將此柱體改為垂直懸吊，使其頂端固定，底端密合連接一個質量為 M 、橫截面亦為 A 的柱形剛體。已知重力加速度為 g ，則當此柱體—剛體系統達到靜止平衡時，沿重力方向之柱體長度伸長量 $\Delta L'$ 及柱體質心位移 $\Delta X'$ 各為何？

(D) 承小題(C)，當系統達到靜止平衡後，若與柱體底端未連接剛體的情況比較，柱體底端(亦即剛體)的高度下降為 H ，而柱體質心的高度下降為 h ，則比值 H/h 為何？

(E) 承上小題(C)與(D)。已知微幅縱波在柱體中的波速 $u = \sqrt{Y/\rho}$ ，且微幅縱波在柱體中形成以頻率 f 做諧振盪的駐波(注：諧振盪是指隨時間以正弦或餘弦函數變化的週期性振盪)，則頻率 f 與 u 的關係為何？當 $m \ll M$ 時，此縱波駐波之基音頻率 f_0 為何？基音頻率以 k 、 M 、 m 表示，且只需準確到微小量 m/M 的一階。

註當 θ 為小角度時： $\tan \theta \approx \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \dots$