

2019年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2019年4月1日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2019 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、太陽系的清除機制

由太陽發射出電磁波的輻射壓為清除太陽系內部微小粒子的主要機制。

(A) 已知輻射線施予一半徑為 r 的球狀粒子上的力 F 可表為： $F = PQ\pi r^2$ ，其中 P 為輻射壓， Q 為一無因次常數與粒子半徑和輻射波長(λ)間的比值(r/λ)有關。假設太陽射出的電磁波為一波長為 $\lambda_{\max}$ 的單色光，且為等向性黑體輻射。

- (i) 若由太陽發射的總功率為 P_s ，試求距太陽中心 R 處的輻射壓（以相關參數表示）。
- (ii) 假設在距離太陽中心 R 處，一半徑為 r 的球狀粒子的密度為 ρ ，試計算該粒子所受輻射壓力 F_R 與重力 F_G 的比值： F_R/F_G （以相關參數表示）。
- (iii) 已知若 $r \ll \lambda$ ， $Q \sim (r/\lambda)^2$ ； $r \sim \lambda$ ， $Q \sim 1$ ； $r \gg \lambda$ ， $Q \sim 1$ 。試討論在太陽系中，前述三種粒徑條件下的粒子，何者最有可能被太陽發射的輻射壓吹離太陽系。

(B) 另一可以清除太陽系內部微小粒子的機制為 Poynting-Robertson 效應，主要係由於輻射壓改變做軌道運動粒子角動量所致，其機制可以簡單由圖 1 示意圖理解：

左邊圖 1(a) 係粒子在受輻射照射後，以運動粒子為參考座標觀察者所見粒子發射熱

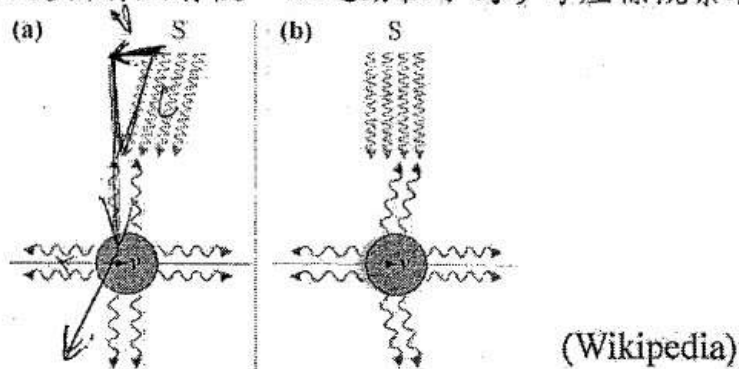


圖 1

輻射為等向性(isotropic)的示意圖；右邊圖 1(b)則為靜止參考座標觀察者所見粒子發射熱輻射的情形，其為非等向性(anisotropic)的示意圖。本小題以運動粒子參考座標作答。

- (i) 考慮一微小粒子以圓形軌道繞行太陽，是求其運動速率 v （以太陽質量 M_{sun} ，軌道半徑 R ，和其他相關基本常數表示）。
- (ii) 如上左邊圖 1(a) 所示，因該粒子處於運動狀態，施加於其上的輻射壓力並非直接指向遠離太陽的方向。假設 $v \ll c$ ，試求輻射壓力對粒子施加的力矩 τ 。
- (iii) 承(ii)，假設該粒子始終維持圓形運行軌道，試求該粒子繞行太陽軌道半徑隨時間的變化關係。
- (iv) 承(iii)，若一半徑 $r \sim 1 \text{ cm}$ ，密度 $\rho \sim 1000 \text{ kg/cm}^3$ 的粒子，一開始以 $R = R_{\text{earth}}$ 的

圓形軌道繞行太陽，試估計自太陽系移除該粒子所需的時間為何？已知： $M_{\text{sun}} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ ； $P_s = 3.828 \times 10^{26} \text{ W}$ ； $R_{\text{earth}} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ； $\lambda_{\text{max}} = 500 \text{ nm}$.

二、金屬片電阻(R_S , sheet resistance)的極大值

(A) 考慮一正方金屬片。此金屬為單原子，由許多邊為 a 的正方形晶格所組成，每個晶格含一個原子； a 稱為晶格常數。此金屬每一個晶格貢獻一個導電電子，且其電阻率由 Drude model $\rho = \frac{m}{ne^2} \tau^{-1}$ 所決定。前式 ρ 為電阻率， m 為電子質量， n 為電子單位體積密度， e 為電子電荷。 τ^{-1} 為散射率(scattering rate)； τ 為電子兩次碰撞間的時間，稱為 relaxation time。依半古典金屬模型（費米氣體），電子運動速度 $v_F = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2)^{1/3} n^{1/3}$ 。假設當此金屬片很薄時， τ 被厚度 d 所決定。試求出此正方形金屬片電阻 R_S 的最大值，以 Ω 表示。

(B) 在二維費米氣體中，單位面積的電子數目為 $n_{2D} = \frac{k_F^2}{2\pi}$ ， k_F 可視為電子物質波的波數 (wave number)。當電子兩次碰撞行經的距離 l 小於物質波長，上述 $\rho = \frac{m}{ne^2} \tau^{-1}$ 可能不再適用。此亦即 $k_F l \approx 1$ 。試求出此限制下的 R_S 的最大值，以 Ω 表示。

(C) 高溫超導體的最簡單模型，視高溫超導體為一片片二維導電平面堆疊而成。YBCO 為一種高溫超導體。下面的實驗數據為三個不同 YBCO 樣品的電阻率 ρ 隨溫度 T 的變化。一般我們認為金屬的電阻率 ρ 隨溫度 T 下降而變小。已知 YBCO 每 $c = 1.17\text{nm}$ 的厚度含兩層金屬片，試問此實驗數據符不符合(B)中的限制？

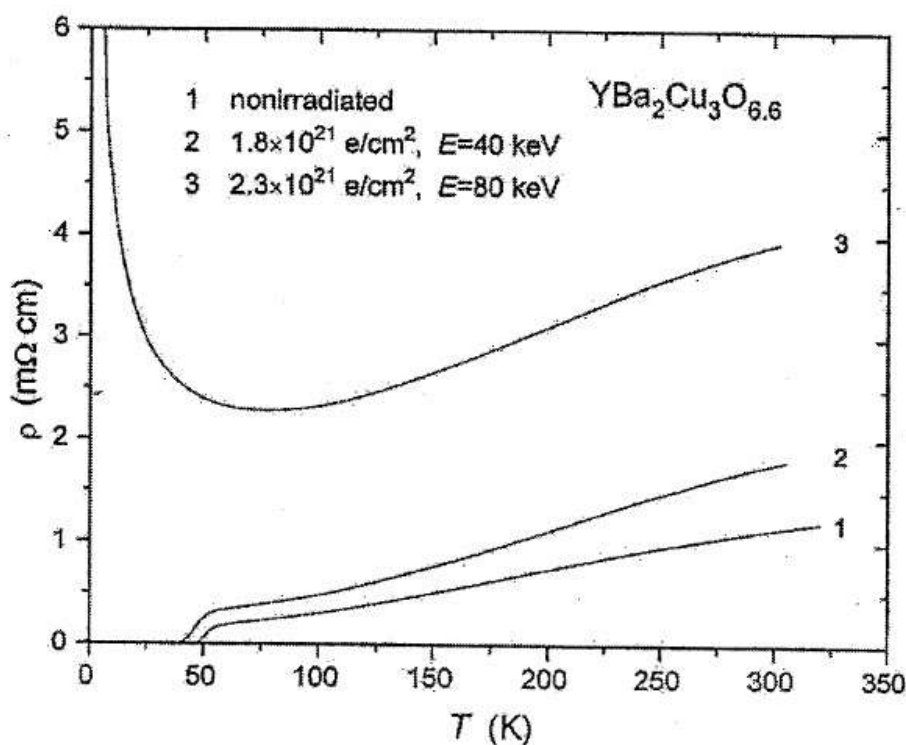


圖 2

三、呼啦圈的運動

搖呼啦圈是一個健身的運動，以腰部做橢圓運動帶動一個半徑遠大於腰圍半徑之細環(呼啦圈)的纏繞與轉動，建立此運動需要一些技巧，本題以力學分析呼啦圈纏繞與轉動穩定運動的條件。為了簡化分析，假設垂直方向的運動可忽略。圖3所示為一個在水平面上的二維簡化模型，其中腰部橫剖面被簡化為在水平面上、半徑為 r 的圓，其圓心為 H ；而呼啦圈則為水平面上、半徑為 R 的均勻圓環，其圓心為 C 。假設均勻圓環(呼啦圈)與圓(腰部)以相接觸的點作純滾動。設呼啦圈質量為 m ，呼啦圈的轉動角度為 θ ，呼啦圈

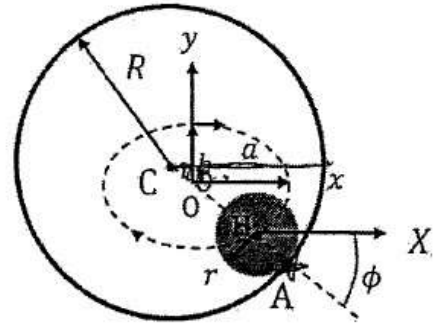


圖 3

的轉動阻力為 $-\kappa \frac{d\theta}{dt}$ (κ 稱為轉動阻尼)。已知 H (腰部圓心)的運動軌跡為 xy 平面上的橢圓，此橢圓的中心為原點 O ，其長軸為 a 、短軸為 b 。 H 的運動軌跡可表示為 $(x(t), y(t))$ ， $x(t) = a \sin(\omega t)$ ， $y(t) = b \cos(\omega t)$ ， ω 為腰部運動的角頻率，試回答以下問題：

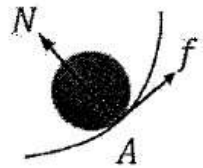


圖 4

- (A) 設 θ 為呼啦圈相對於圓心的轉動角度。 ϕ 為呼啦圈纏繞腰部的角度，即 $\overline{CA}$ 與 X 軸間的夾角(如圖3所示)， X 軸的方向相對固定於 H 。若作用在腰部的摩擦力為 f 、正向力為 N (如右上之局部放大圖(圖4)所示，作用點為與呼啦圈之接觸點 A)，試求 θ 與 ϕ 的運動方程式。(提示：在 H 點固定的座標中， C 的運動軌跡為一個圓)
- (B) 利用呼啦圈與腰部的圓以相接觸的點做純滾動、不滑動的運動消去摩擦力，求出 ϕ 的運動方程式。
- (C) 當腰部圓心 H 的運動軌跡為圓時，即 $a = b$ ，試求能使呼啦圈以角頻率 ω 做纏繞腰部運動(即 $\phi = \omega t + \phi_0$ ， ϕ_0 為呼啦圈做纏繞運動的起始角度)所需腰部運動之最小半徑 $a_{\min}$ 。
- (D) 接(C)小題，考慮對呼啦圈以角頻率 ω 做纏繞腰部之運動的微小擾動，試求呼啦圈能維持與腰部接觸、且以角頻率 ω 做纏繞腰部之運動穩定的條件，以呼啦圈開始做纏繞運動的角度 ϕ_0 表示。
- (E) 一般搖呼啦圈時，腰部不會做完美的圓週運動。若考慮腰部作橢圓運動，即 $a \neq b$ ，當 a 與 b 相差不大，即 $0 < \epsilon = a - b \ll 1$ 時，試求相對於腰部作圓周運動，到 ϵ 一次項，呼啦圈纏繞腰部之穩定運動之角度的修正，即 $\phi(t) = \omega t + \phi_0 + \epsilon \phi_1(t)$ ，求 $\cos \phi_0$ 與修正 $\phi_1(t)$ 的形式(以無單位的量 $\gamma = \frac{\kappa}{2mR^2\omega}$ 與 $\mu = \frac{a+b}{4(R-r)}$ 表示)，由此可得出呼啦圈的運動不是單一頻率的運動。

四、宇宙微中子背景

早期宇宙溫度 T (絕對溫度)極高，當粒子熱運動的能量遠大於其靜止質量 m 對應的能量時(即 $kT \gg mc^2$ ， $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ，為波茲曼常數)，該粒子可視為相對論性粒子，換句話說此時粒子的質量可忽略，其平均運動速率接近光速 c ($c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)，且其能量與動量的關係可視為 $E = pc$ 。

(A)若所有粒子皆可視為理想氣體，由氣體動力論證明壓力 $P = \rho/3$ ， ρ 為能量密度。

(B)由熱力學第一定律證明此理想氣體的熵 $S = (4/3)(\rho V/T)$ ，且 ρT^{-4} 為定值。

(C)宇宙膨脹時，其長度因子 $R(t)$ 會隨時間變大。假設已知宇宙膨脹的過程中，系統的熵會維持不變，證明 $R(t)T$ 為定值。

(D) $R(t)$ 滿足的運動方程式為 $\ddot{R} = -\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t)R(t)$ ，這類似於一個質點在均勻質量密度分佈所造成之重力場中的運動。若已知 $R(t) = R_0(t/t_0)^{\alpha_0}$ ，其中 α_0 為常數且設 $\rho_0 = \rho(t_0)$ 。求 α_0 及 t_0 ，以物理常數及 ρ_0 表示之。

(E)微中子可透過下列過程： $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow e^- + e^+$ ， $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ ，與電子、正子及光子等其它粒子保持熱平衡。若已知上述過程的散射截面為 $\sigma_\nu = G_F^2 s$ ，其中 s 為質心能量的平方， G_F 為費米常數。假設已知單位時間內每個微中子發生散射的次數 $\Gamma = n\sigma_\nu c$ 為，而哈伯參數 $H = \dot{R}/R$ 給出典型的時間尺度。當 $\Gamma < H$ 時，這些過程的反應速率不夠快，使得微中子無法再與電子、正子與光子等其它粒子保持熱平衡，這就是所謂的去耦合(decoupling)。假設所有的能量都和 kT 為同一個數量級，由此估算微中子的去耦合時間 t_{dec} 。若 $t_{\text{dec}} = a_0 \rho_0^{b_0} T_0^{c_0}$ ，求 a_0, b_0, c_0 。

註：當 $t > t_{\text{dec}}$ ，微中子不再與其他粒子有任何能量的交換，自己形成所謂的宇宙微中子背景(CNB)，其溫度 T_ν 會隨宇宙膨脹而降低。

(F)由(C)小題知當宇宙膨脹時，其溫度會下降。當宇宙的溫度 $T < m_e c^2/k$ 時，電子及正子就不再是相對論性粒子。此時波茲曼因子 $\exp(-m_e c^2/kT)$ 會使電子及正子的熵變得可以忽略。由於系統的熵會維持不變，電子及正子的熵會透過下列過程 $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ 轉移給光子。假設已知在同一個溫度下，單一自由度費米子與玻色子的熵之比值為 $7/8$ ，求當宇宙溫度從 $T > m_e c^2/k$ 降到 $T < m_e c^2/k$ 前後，光子的熵會變成原本的幾倍？

五、倒轉陀螺

一倒轉陀螺之外型為半徑 R 的圓球另外加一固定的短棍(棍子的長度為 d)，如圖 5(a)所示。倒轉陀螺的質心並不在圓球的幾何中心 C 處，而是在 C_M 處； C_M 與 C 的距離為 a ，它們的連線通過短棍，其延伸的方向 $\hat{e}_3$ 與 $\hat{z}$ 形成夾角 θ 。本題考慮對稱的倒轉陀螺： $\hat{e}_3$ 為其中一個轉動對稱軸，轉動慣量為 I_3 ；另外兩個轉動對稱軸為 $\hat{e}_1$ 與 $\hat{e}_2$ ，轉動慣量皆為 I ； $\hat{e}_1 = \hat{z} \times \hat{e}_3 / |\hat{z} \times \hat{e}_3|$ ，而 $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$ ，倒轉陀螺與光滑水平的地面的接觸點為 T ，如圖 5(a)所示。 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 與 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 之間以兩個轉動為連結，其中轉動 $\hat{z}$ 軸角度 ϕ 後， $\hat{x}$ 被轉至 $\hat{e}_1$ ；另外轉動 $\hat{e}_1$ 軸角度 θ 後， $\hat{z}$ 被轉至 $\hat{e}_3$ ，如圖 5(b)所示。

(A) 已知 $\hat{e}_1 = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$ ， $\hat{e}_3 = \sin \theta \sin \phi \hat{x} - \sin \theta \cos \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$ ，試求 $\hat{e}_2$ 以 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 表示的表達式。

(B) 試求 $\hat{z}$ 以 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 表示的表達式。

(C) 若倒轉陀螺繞轉軸 $\hat{e}_1, \hat{z}, \hat{e}_3$ 的轉動角速率分別為 $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ ，試求倒轉陀螺的轉動角速度 $\vec{\omega}$ 與角動量 $\vec{L}$ ，以 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 表示的表達式。

(D) 試求 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 座標系統相對於 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 座標系統的轉動角速度 $\vec{\alpha}$ 。相對於倒轉陀螺的質心，試求力矩 $\vec{\tau}$ 。

試求對應的 $d\vec{L}/dt = d'\vec{L}/dt + \vec{\alpha} \times \vec{L}$ 。右式中的 $d'\vec{L}/dt$ 是指在 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 座標系中所得到的 $\vec{L}$ 的時變。

(E) 試求倒轉陀螺的動能 K 與位能 V 。

已知拉格朗日量 $L = K - V$ 可以透過 $p = \partial L / \partial \dot{q}$ 幫助我們找到對應於座標 q 的共軛動量 p ，試求共軛動量 p_θ, p_ϕ ，與 p_ψ 。

已知 $\partial L / \partial q = \dot{p}$ ，試確認守恆的共軛動量。

試將倒轉陀螺的總能量 $E = K + V$ 以共軛動量表示。

(F) 考慮 $I = I_3$ 且高速自轉(即 $\dot{\psi}$ 很大且為正)的倒轉陀螺，在 $t = 0$ 時其 $\phi = 0$ ， $\dot{\theta} = 0$ ， $\theta = \theta_0 < \pi/2$ ；試利用(D)的結果討論 θ 在短程改變的趨勢。

(G) 考慮 $I = I_3$ 且高速自轉(即 $\dot{\psi}$ 很大且為正)的倒轉陀螺，在 $t = 0$ 時其 $\dot{\theta} = 0$ ， $\theta = \theta_0 < \pi/2$ ；試利用(D)的結果討論若要倒轉陀螺的 θ 增加， $\dot{\phi}$ 應為如何。

(H)考慮 $I = I_3$ 且高速自轉(即 ψ 很大且為正)的倒轉陀螺，在 $t = 0$ 時其 $\dot{\theta} = 0$ ，短棍恰與地面接觸；試利用(D)的結果討論若要倒轉陀螺的 θ 增加， ϕ 應為如何。

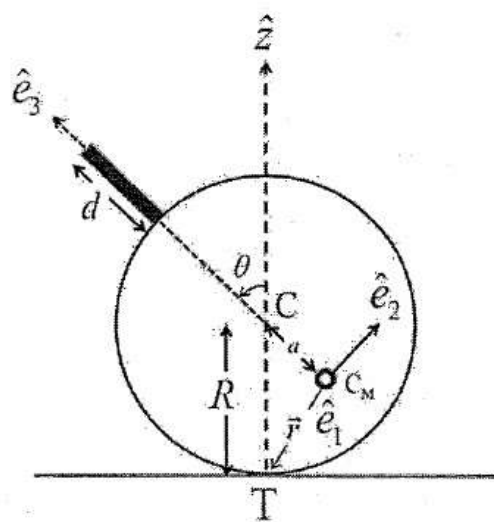


圖 5(a)

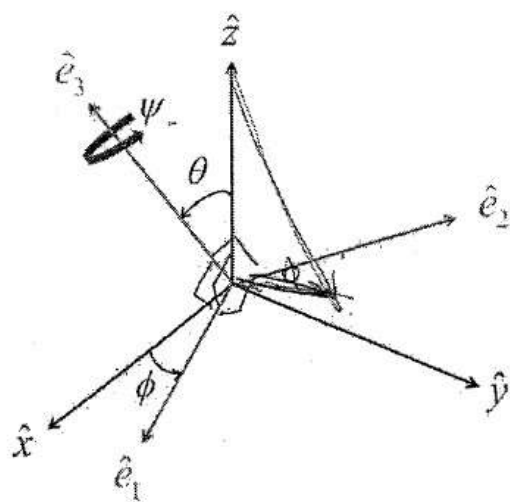


圖 5(b)