

2019年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2019年4月2日 08:10-13:10

- 一、本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。
- 二、答卷時間五小時。
- 三、限以藍色或黑色原子筆作答。
- 四、在指定的答案紙上作答。
- 五、在每題開始時換用新頁。
- 六、在每一頁答案紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答案紙之頁碼
 - 該題所用答案紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

—	1	1/3
—	2	2/3
—	3	3/3

2019 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。

一、離子在氣體中的遷移率

氣體中的中性分子，在被輻射游離後，有一部分會成為帶電的離子。在沒有外加電場下，這些離子會擴散，不停地與氣體分子碰撞，在達到熱平衡時，離子與氣體分子每一粒子的平均動能相等。若有外加恆定電場 $\vec{E}$ ，則離子除了熱運動的速度外，還會因受到電場的作用，而在電場方向上獲得額外的漂移速度 $\vec{v}_d$ ：

$$\vec{v}_d = k\vec{E} \quad (1)$$

上式中的比例常數 k 或其絕對值 $\kappa = |k|$ 稱為離子在氣體中的遷移率。

本題假設由分子與離子組成的氣體適用氣體動力論，且各粒子的熱運動不因離子帶有電荷而受影響，離子的數目遠小於分子的數目。考慮的氣體均勻分布，每個氣體分子(與它被游離後形成的離子)的質量均為 m ，每單位體積的分子數(即粒子數密度)為 n ，氣體分子熱運動的平均速率為 $\bar{v}$ ，平均自由徑為 λ 。

A 部分

(1)一個氣體分子在發生碰撞後的自由徑(即到下一次碰撞前所走的距離)至少為 L 的機率 $P(L)$ 為何？($P(L)$ 亦即離子必可到達 L 遠的機率。)

(2)假設每個氣體分子游離後形成的離子所帶的電荷為 e ，而外加的恆定電場 $\vec{E} = E\hat{z}$ 並非很強，則離子在每次碰撞後到下次碰撞前，沿 z 軸的平均位移 $\bar{z}$ 為何？平均碰撞時間 $\bar{t}$ 為何？離子在氣體中的遷移率 k 為何？

B 部分

要測量遷移率可用 Zeleny 的方法。如圖 1 所示，一個內半徑為 b 的水平長導體圓管 TT' 中，有兩段長度相等、半徑均為 a 的同軸導線 CD 與 EF，它們可當作電極，兩段導線與圓管絕緣，且 DE 間有很小的間隙，此間隙到 AB 平面的水平距離為 d 。

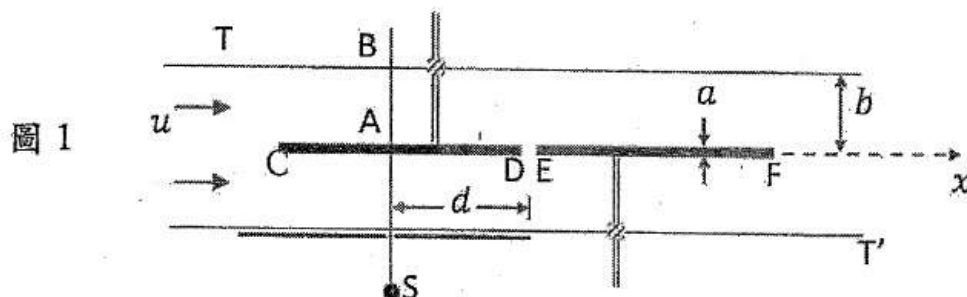


圖 1

作為電極的 CD 與 EF 維持接地，電位為零，而導管則連接直流電源，電位為 V 。

(3)試求到電極的徑向距離為 r 處的電場量值 $E(r)$ 。

(4)承上(3)題，並假設正離子的遷移率 k 為已知。令氣體分子以穩定的速率 u 沿水平的 x 軸

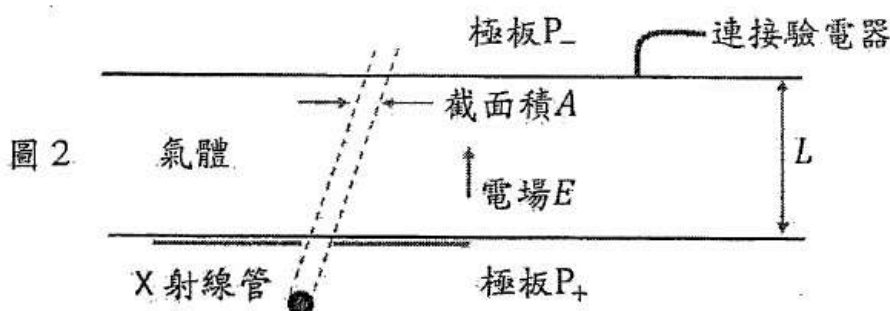
在圓柱導管中流動，而由管外輻射源 S 發出的 X 射線 SAB 垂直於導管，使得管中 AB 平面上整個截面(面積為 πb^2)的各位置均勻出現電荷為 $\pm e$ 的正、負離子。在氣體流中的正、負離子會分別往電極、導管移動，而到達電極 CD 與 EF 的正離子，其總電量可用驗電器量測。

在管中各處，假設(1)式的 $\vec{v}_d = k\vec{E}$ 均能成立，則當 X 射線照射後出現的正離子只能到達電極 CD 而不能到達電極 EF 時，導管的電位 V_0 為何？而在此情況下，氣體的體積流率 ϕ_0 (每單位時間流過導管截面的體積)、電位 V_0 與遷移率 k 之間的關係為何？

C 部分

Langevin 提出另一個測定離子遷移率的好方法。如圖 2 所示，使間距為 L 的平行極板 P_+ 與 P_- 之間充滿氣體。施加直流電壓於兩極板，使其產生均勻電場 E 。在時間 $t = 0$ 時，瞬間發出一次的 X 射線閃光，使其通過氣體，將分子游離。在閃光後，當時間 $t = T$ 時，將兩極板的電位對調，使電場 E 的方向反轉。等待一段足夠長的時間，讓離子都漂移到極板後，以驗電器測量 $t = 0$ 時電位較低之極板 P_- 上收集到的淨電荷 $Q(T)$ 。

然後依上述步驟重新開始實驗，選擇另一個 T 值($0 \leq T < \infty$)，並量取 $Q(T)$ ，如此重複進行多次，最後再由 Q 隨時間 T 的變化求出離子的遷移率。



通過氣體的 X 射線閃光，由一極板平面延伸射到另一極板平面，且可視為均勻射束，其平行於極板平面之截面積為 A 。被 X 射線照射到的氣體，每單位體積產生的正、負離子的總電量分別為 q 、 $-q$ 。令正、負離子的遷移率絕對值分別為 κ_+ 、 κ_- ，且已知 $\kappa_- > \kappa_+$ 。實驗獲得的 $Q - T$ 關係如圖 3 的實線折線所示。

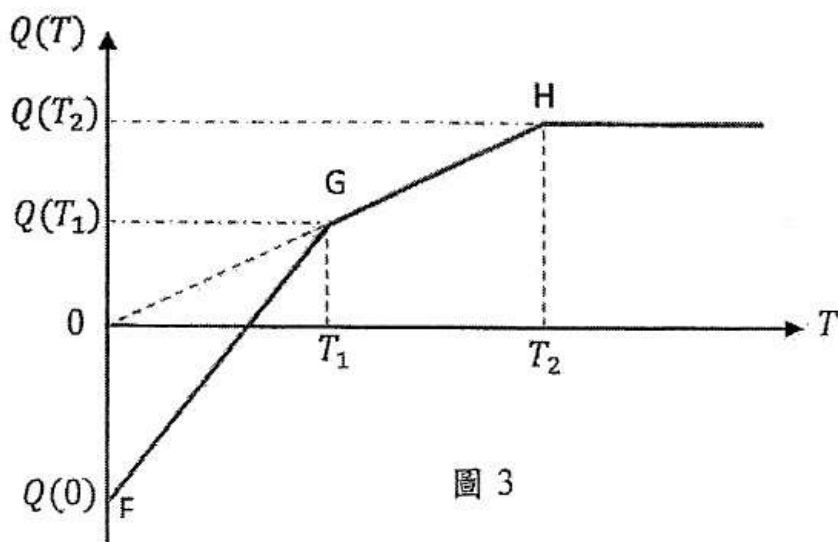


圖 3

以下問題的答案，須以電場 E 、間距 L 、每單位體積產生的電量 q 、截面積 A 、遷移率絕對值 κ_+ 與 κ_- 表示。忽略正負離子的復合。

(5) 求出圖 3 中 $Q(0)$ 、 $Q(T_1)$ 、 $Q(T_2)$ 、 T_1 、 T_2 的表示式。注意： $T=0$ 的情況代表從 $t=0$ 開始， P_- 的電位一直維持高於 P_+ 。

積分公式：

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!, \quad \int_x^{\infty} e^{-x} dx = e^{-x}, \quad \int_1^r \frac{dr}{r} = \ln r$$

二、超導磁浮的穩定性

使用靜磁場將帶磁性物體浮在空間中是一個有趣的現象，但此現象的穩定性與磁場本身的特性與物體所帶之磁性有關，以下我們分析超導磁浮的穩定性與磁場的關係。

(A). 如圖 4 所示，帶磁性物體受某一電流分佈所產生之磁場浮在 O 點附近，若取 O 為坐標原點附近，若磁場分佈具圓柱形對稱，則 O 點附近的磁場 $\vec{B}$ 為坐標 z 與 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的函數，且 $\vec{B}$ 只具沿 z 軸與徑向 r 的分量 B_z 與 B_r 。已知 O 點附近

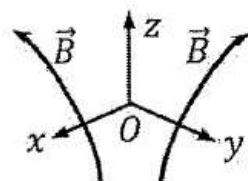


圖 4

為真空不帶電流，且磁場分量 B_z 與 B_r 對 O 點附近可作精確到 2 次項的展開式

$$B_z = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 r + b_4 r^2 + b_5 r z + \dots$$

$$B_r = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 r + c_4 r^2 + c_5 r z + \dots$$

(i) 考慮一以 O 點為下方表面中心點之半徑為 r 、高為 z 之小圓柱體(如圖 5 所示)，假設 b_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) 為已知，試透過計算離開此小圓柱體表面之磁場通量求出 c_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)。

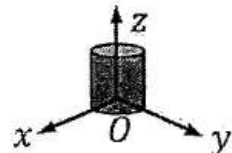


圖 5

(ii) 如右圖 6 所示，考慮一以 O 點為頂點之一、寬為 r 、長為 z 的小長方形，試利用安培定律求磁場沿長方形邊界切線投影之積分(逆時針方向)，以 b_n 與 c_n ， $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 表示之。由此積分結果推論，並結合(i)小題的結果，以 b_0 、 b_1 與 b_2 表示 B_z 及 B_r 。

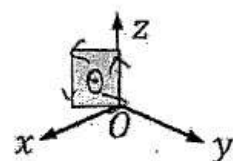


圖 6

(提示：(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; (2) 當一個恆為零的函數，其級數展開的係數皆為零)

(B). 如圖 7 所示，在一帶有電流 I 、半徑為 a 之線圈的上方沿線圈軸心方向(z 軸)上，放置一超導線圓盤，假設 a 遠大於超導圓盤半徑 r_0 ，使得磁場在超導圓盤的變化可被忽略，即作用在超導圓盤之磁場可以以圓盤中心點的磁場代表。已知超導圓盤的質量為 m 、自感為 L 、電阻為零，且內部的磁場恆為零(為第一類超導)，設超導圓盤在 z 軸上的平衡位置為 z_0 ，試回答以下問題：

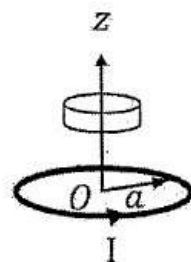


圖 7

(i) 試求線圈產生磁場對應(a)小題之 b_0 、 b_1 、 b_2 係數，並由此得到

磁場強度平方 $B^2 = B_z^2 + B_r^2$ 在平衡位置 z_0 附近精確到 2 次項的展開式(以 b_0 、 b_1 、 b_2 表示)。

- (ii) 假設超導圓盤自感 L 以及圓盤垂直外加磁場之截面積隨外加磁場方向的變化可忽略不計，試求超導圓盤在位置 (r, z) 之總力學能(重力位能以 $z = 0$ 為位能零點)。(以 r_0 、 L 與 $B(r, z)$ 表示)
- (iii) 試求超導圓盤能達平衡之質量的限制條件，若平衡位置為 z_0 ，求出穩定平衡之 z_0/a 值的範圍。
- (提示：一個變數的函數可以做以下展開：

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{df(z_0)}{dz} + \frac{(z - z_0)^2}{2} \frac{d^2f(z_0)}{dz^2} + \dots$$

- (C). 此小題考慮磁鐵浮在超導體上的穩定性，已知半徑為 a 、厚度為 h 的圓盤磁鐵，若磁化強度為 M ，則可以等效視為一個半徑為 a 帶電流 $I = Mh$ 之電流圈。圖 8 為磁鐵圓盤的等效電流圈浮在一半無限大超導體上之示意圖，設 z 軸與電流圈中心軸重合，原點 O 定在超導體表面，因此超導體佔據 $z < 0$ ，試回答以下問題：

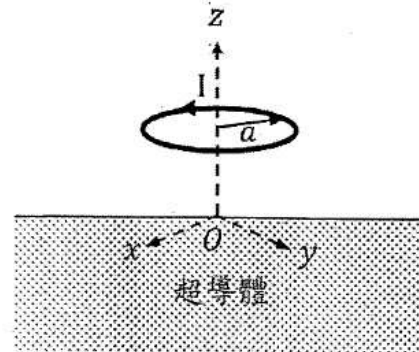


圖 8

- (i) 考慮位於 (x, y, z) ($z > 0$) 上的一小段電流 $d\vec{l} = (\Delta I_x, \Delta I_y, 0)$ ，此電流段在超導體中產生感應電流以維持超導體內部磁場為零，而感應電流在 $z > 0$ 區域產生的磁場則可以以一位於 $(x, y, -z)$ 等效的鏡像電流產生。已知等效電流只要在超導體表面維持磁場沿 z 軸方向分量的連續(即 B_z 在超導體表面上、下相等)，則此等效電流在 $z > 0$ 區域產生的磁場即為正確的磁場。試求 $d\vec{l}$ 的鏡像電流，並由此求出磁鐵圓盤之等效鏡像電流圈電流的走向(順時針或逆時針)。
- (ii) 設等效電流圈的質量為 m ，試求超導圓盤能達平衡之質量的限制條件。若設平衡高度為 d ，將等效電流圈拉離平衡高度一小段再予以釋放，試透過磁場對平衡點的展開求出等效電流在平衡點為穩定平衡的條件(d/a 的範圍)，在穩定平衡的條件下求出等效電流圈釋放後運動週期的角頻率。

三、光鉗 (optical tweezers)

光鉗或光學鉗子(optical tweezers) 是一種操控雷射光束來精準地移動或捕捉微小物體的裝置。光鉗技術可以用於移動生物顆粒或者冷卻原子，而被廣泛的應用在生物、醫學與物理領域。以下將探討光鉗技術之物理機製。

光鉗的基本原理如圖 9 所描述，此處我們考慮一微小透明介電質球物體(半徑為 R_s ，折射率 n_s ，球體中心為 O)處於液態介質中(介質折射率 n_m)，雷射光的波長為 λ ，且考慮在 $R_s \gg \lambda$ 極限下。雷射光經過高數值孔徑(NA)的顯微物鏡後，光束線高度聚焦於微小透明球體內，焦點標示為 f_c 。圖 9 舉例考慮一組對稱單光束 a 與單光束 b 照射於小球上，

因為光壓進而產生力 F_a 與 F_b 作用於小球上，而其合力 F 將指向雷射光焦點處。一般而言，只要球體中心 O 離開焦點 f_c ，可證明光壓力 F 將如同一回復力將小球體推回至焦點處，小球體若被捕捉後其運動可視為一布朗簡諧振盪子。

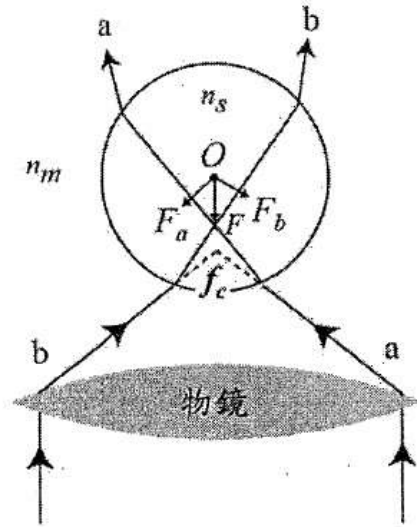


圖 9：介電質球體被聚焦雷射光束照射示意圖。為簡化說明此處未討論反射光線， F_a 與 F_b 由光折射產生，並指向動量改變方向。

第一部分：光壓產生力

(A) 考慮在介質中(折射率 n_m)，雷射光垂直入射於一鏡面，光束功率為 P_b ，光束完全反射轉移動量至鏡面所產生之力 F 可表為 $F = 2\eta P_b$ ，求 η (將 η 以 n_m 及光速 c 表示)。

(B) 考慮介質為去離子水 $n_m = 1.343$ ， $P_b = 4.8 \text{ mW}$ ，求出 F 的值。

一般而言光壓產生的力可表示為

$$F = \eta P_b Q \quad (1)$$

此處 Q 為一無量綱之參數，表示光對照射物的散射狀態，例如 $Q = 1$ 光被完全吸收， $Q = 2$ 光被完全反射。式(1)表示光壓產生的力可由光散射光束功率的變化求得。

第二部分：單光束線散射力與梯度力

若僅單單考慮由光反射所產生的力，此力可推動小球但不能捕捉小球，為局限小球的運動還要考慮光散射對小球所施加的梯度力 (gradient force)。

(C) 現考慮光被小球散射，如圖 10 所示，光線沿 z -軸入射，入射角為 θ ，折射角為 γ ，光線動量因光的反射和折射改變而產生力，此力可視為作用於球心 O 上。各個散射光功率可由 $P_b R$, $P_b T^2$, ..., $P_b T^2 R^n$ 來求得，此處 R, T 分別為在入射角 θ 時之反射率與穿透率。求出圖 10 中光線散射所產生作用力 $F_z = Q_z \eta P_b$ 和 $F_y = Q_y \eta P_b$ (依圖 10 所示之座標)， Q_z 與 Q_y 以 θ, γ, R, T 來表示。 F_z 被稱為散射力，而垂直分力 F_y 稱為梯度力。

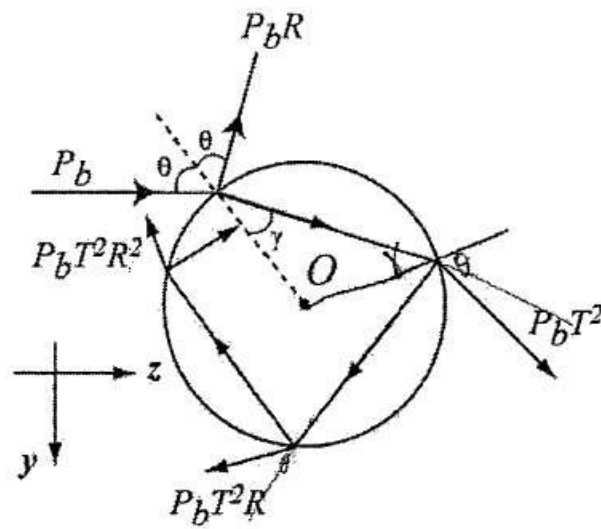


圖 10：入射光線在小球上經歷多次反射與折射示意圖

(D)考慮入射光源在物鏡上均勻分佈，雷射光無特殊偏振狀態，反射率 R 由菲涅耳方程式(Fresnel Equation)可表示為：

$$R(\theta, \gamma) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\theta - \gamma)}{\sin(\theta + \gamma)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\tan(\theta - \gamma)}{\tan(\theta + \gamma)} \right]^2 \quad (2)$$

而 $T(\theta, \gamma) = 1 - R(\theta, \gamma)$ 。單光束線造成之作用力 F 的大小可由

$F = \eta P_b Q = \eta P_b (Q_z^2 + Q_y^2)^{1/2}$ 而求得。

現在考慮 $n_s = 1.57$ ，求出 $\theta = 30^\circ$ 與 $\theta = 60^\circ$ 時之 Q ，與對應 F 的方向。 Q 值準確到小數點後兩位數即可，方向依圖 10 所示之座標表示。

現在考慮入射光源在空間中有一梯度分佈。對單一光束線造成之 $d\vec{F}$ 可表示為

$$d\vec{F} = \eta [Q_z \hat{z} + Q_y \hat{y}] dP_b \quad (3)$$

第三部分：雷射光束強度分佈之效應

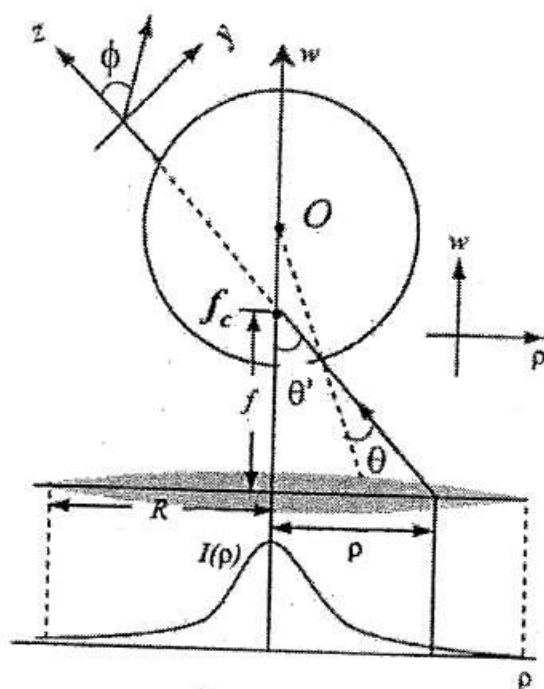


圖 11：雷射光束強度分佈示意圖

(E) 考慮雷射光在入射物鏡前(如圖 11 所示)光束在空間上為一高斯分佈,雷射光強度 $I(\rho)$

可表示為 $I(\rho) = I_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$, 其中 σ 為高斯光束(Gaussian beam)之束腰(waist)。已

知物鏡半徑為 R , 焦距為 f , 求通過物鏡之光功率 P_b 與雷射光總功率 P_t 的比值, 即求 P_b/P_t 。

此處會用積分式 $\int x e^{-cx^2} dx = -\frac{1}{2c} e^{-cx^2}$

(F) 已知 $\sigma = 2.3 \text{ mm}$, 物鏡折射率 $n_g = 1.58$, 數值孔徑 (NA) 為 1.4 , $P_t = 250 \text{ mW}$ (cw Ti-sapphire laser, 830 nm), 求 R 與 f 。 P_b (提示: $f = \frac{n_g R}{NA}$)

(G) 參考圖 11, 光束聚焦於 w -軸上, 求出光束功率與入射角 θ' 的變化關係, 即求出 $dP/d\theta'$, 以 P_t, f, θ' 和 σ 來表示。

由前計算已知 $Q(\theta)$ 與 $dP(\theta')$, 再求知角度 θ 與 θ' 關係後由式(3)積分全部入射角度後可得到作用力。