

2020年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2020年5月2日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2020 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、 線圈的電磁感應及其運動

如圖 1 所示，一長為 D 、寬為 X 、質量為 m 的長方形線圈，垂直置放於一均勻磁場 B 中，且磁場 B 與線圈面垂直。在時間 $t = 0$ 時，線圈的底端恰好位於磁場 B 的邊緣處。以 $y(t)$ 表示線圈頂端相對於磁場邊緣的位置。上述的初始條件即為 $y(0) = D$ 。電流方向以逆時針方向為正， y 方向以向上為正。(提示： $\int \frac{dx}{x} = \ln x$)

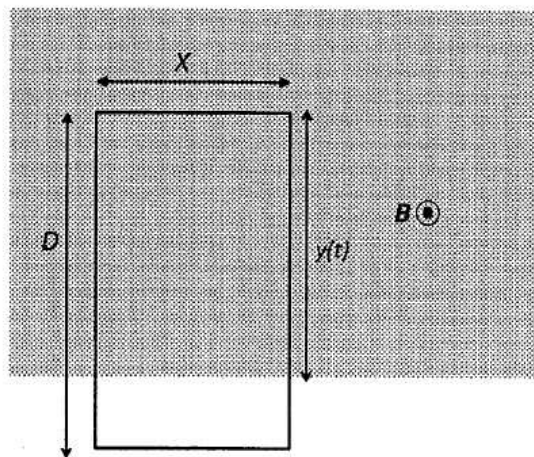


圖 1

A 部分

將該線圈在 $t = 0$ 時釋放，並假設 D 夠長，使得

線圈在其頂端離開磁場 B 前，掉落的速度即已達到終端速度 v_T 。若該線圈的電阻為 R ，且其電感可忽略，試回答下列各題。答案以 X, D, B, m, R, t 和重力加速度 g 表示。

- (i). 求該線圈的終端速度 v_T 的量值。
- (ii). 試求線圈在完全掉出磁場範圍之前，其速度與時間的關係。
- (iii). 試求線圈電阻的熱耗散速率。
- (iv). 試求從 $t = 0$ 開始到線圈頂端恰掉出磁場範圍時，線圈所耗散的總電力熱能。

B 部分

將該線圈改為超導線圈，則其電阻可以忽略，但是其電感 L 則不可忽略。假設 D 夠長，可使線圈頂端不至於掉離磁場 B 之外。試回答下列各題，答案以 X, D, B, m, L, t 和重力加速度 g 表示。

- (v). 試證明線圈將以簡諧運動上下振動，並求其振動之週期。
- (vi). 試求線圈位置對時間的關係，即 $y(t)$ 。
- (vii). 試求簡諧運動過程中，線圈的最大動能。
- (viii). 試求簡諧運動過程中，儲存於線圈內磁場的最大磁能，並求出其發生的時間點為何。

二、 緩慢縮短的單擺

一單擺懸掛於天花板下，繩子下端為一質量為 M 的質點，繩子的質量可忽略不計，重力加速度量值為 g 。此單擺以小角度自由擺盪於一垂直平面上。現將繩長以極慢的速率縮短，即 $L/\dot{L}$ 遠大於單擺的週期。

(A) 在繩長為 L 、擺幅為 θ_0 的擺盪過程中，繩子的平均張力量值為何？

(B) 當繩長為 L 、擺幅為 θ_0 時，若繩長作微量的變化 ΔL （繩子縮短，故 $\Delta L < 0$ ），擺幅也會跟著作微量的改變 $\Delta\theta_0$ 。試問此過程中，質點的力學能變化量為何？

答案以 L 、 θ_0 、 ΔL 、 $\Delta\theta_0$ 表示之。

(C) 根據以上結果，當繩長縮短至原長的一半時，求單擺擺幅變為原來的幾倍？

提示：

1. 泰勒展開式： $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

2. 微分式： $d \ln(x) = \frac{dx}{x}$

三、靜磁場中轉動金屬之電荷分布與地磁產生的機制

當金屬以速度 $\vec{v}$ 在靜磁場中運動時，金屬中的自由電荷會受到勞倫茲力作用而移動，這使得在靜磁場中運動之金屬的電流與電荷分佈與靜止之金屬的電流與電荷分佈完全不同。本問題討論靜磁場中轉動金屬之電荷與電流分佈。假設所牽涉到的速度滿足 $v \ll c$ ，數量級為 v^2/c^2 或以上的項(如電荷運動所產生的磁場)可忽略不計。

A 部分

如圖 2 所示，在一沿 z 軸、範圍在 $r \leq a$ 之外加均勻靜磁場 B 中，一半徑為 a 之電中性金屬圓盤，圓盤與其中心金屬軸(沿 z 方向)以滑動接觸相連且相對於中心軸以角速度 ω 旋轉。若中心金屬軸的半徑可忽略，且金屬的電導率為 σ ，當圓盤中電荷與電流分佈達到穩定時，將金屬軸與圓盤邊緣相連接，以伏特計測量其電位差 V (圓盤邊緣-金屬軸)，試回答以下問題：

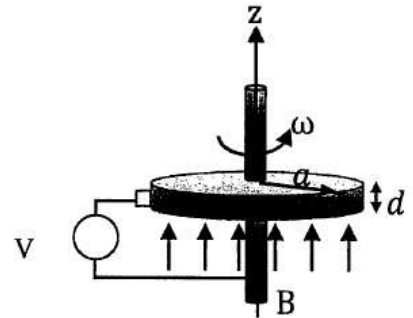


圖 2

(設真空的介電常數為 ϵ_0)

- 當電荷與電流分佈達穩定時，設金屬圓盤中任一點 $(\vec{r}, z)$ ($|\vec{r}|$ 為距中心軸之距離)的電場為 $\vec{E}$ 、磁場為 $\vec{B}$ ，試推論 $\vec{E}$ 與 $\vec{B}$ 所滿足的方程式，並由此求出電位差 V 。
- 忽略邊界效應，將圓盤視為長圓柱體，考慮通過半徑 r 與 $r + dr$ ($dr/r \ll 1$)之圓柱面的電場通量。試求電荷與電流分佈達穩定時之電荷分布。
- 考慮通過半徑 r 與 $r + dr$ ($dr/r \ll 1$)之圓環柱面的電流，試估算在 $(\vec{r}, z)$ 點的電荷密度 ρ 之時變率 $\frac{d\rho}{dt}$ 。並由此推估，當圓盤由 $t = 0$ 開始轉動，電荷與電流分佈達到穩定的時間。

B 部分

如圖 3 所示，適當的安排可以在無外加磁場的情形下，將金屬盤轉動所產生的電流經由螺線管線圈 Γ 產生磁場以推動金屬盤上的電流，最後產生穩定的磁場，這也是解釋地球磁場如何產生的一個簡單模型。假設連接金屬盤與中心金屬軸的線路的自感為 L (主要來自 Γ)，電阻為 R ，螺線管線圈的單位長度之線圈數為 n 、半徑為 a 、總長度為 ℓ ，金屬轉盤與中心軸的轉動慣量為 I ，轉動的阻力係數 γ (即阻力產生的力矩為 $-\gamma\omega$)，試回答以下問題：

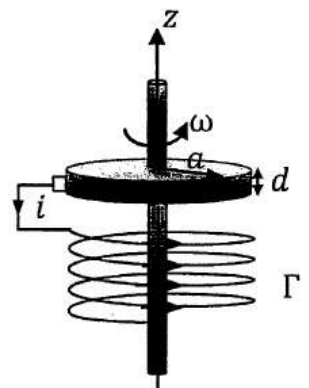


圖 3

- 假設金屬盤與螺線管線圈之距離可忽略，因此可忽略邊緣場的效應，螺線管線圈產生的磁場可以用中心軸上的磁場估計，試求自感 L 及金屬圓盤與螺線管線圈間的互感 M 。當線圈中之電流為 i 時，金屬盤轉速為 ω ，試以 L 、 M 、 R 與 ω 寫出電流 i 所應滿足的方程式。
- 當線圈中之電流為 i 時，試求作用在金屬盤的力矩(以朝 $+z$ 方向為正)。

(iii)由(i)與(ii)小題可以得到電流 i 與轉速 ω 所滿足的方程式。假設一固定的力矩 τ_0 作

用在中心金屬軸上使系統轉動，若 $\tau_0 > 2\pi\gamma \frac{R}{M}$ ， $\omega(0) = \omega_0 > \frac{2\pi R}{M}$ ，試問若

$i(0) = 0$ ，系統穩定時的轉速 ω_e 與此時的電流 i_e 為何？又若電流在 $t = 0$ 因擾動而有一微小而不為零的值，如 $i(0) = 0.01$ ，系統達到穩定時的轉速 ω_e 與此時的電流 i_e 又為何？

(iv)在 $\tau_0 > 2\pi\gamma \frac{R}{M}$ 的條件下， ω 對 i 的作圖上，描繪各不同起始值($i(0), \omega(0)$)所對應大致的軌跡。

註： $i(0)$ 及 $\omega(0)$ 分別為 $i(t)$ 及 $\omega(t)$ 在 $t = 0$ 時的數值。

四、錐擺

考慮一個質量為 m 的質點與線長為 d 的單擺系統，如圖 4 所示。重力加速度為 g ，忽略地球自轉及細線的質量的效應。單擺系統的初始狀態為 $\theta = \theta_0$ ， $\dot{\theta} = d\theta/dt = 0$ ，質點的速度為 $-v_0\hat{y}$ （此時單擺系統在 $x-z$ 面上）。

- (A) 求系統相對於單擺支點 O 的角動量 L_z 。
 (B) 寫下系統的總能量 E_0 ，以 $\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ 表示之。
 (C) 若單擺運動 θ 的最小值為 $\theta_{\min}$ ，求 v_0 。

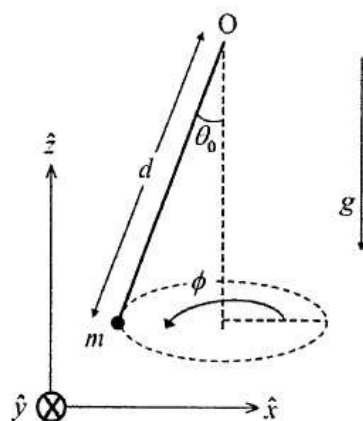


圖 4

- (D) 試推導出 $d\phi/d\theta$ 的形式為 $\frac{d\phi}{d\theta} =$

$$\frac{A}{\sin \theta \sqrt{mgd(\cos \theta - \cos \theta_0) \sin^2 \theta + \frac{1}{2}mv_0^2(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0)}}, \text{ 並求出的 } A \text{ 表達式。}$$

- (E) 若 $\theta_0 \ll 1$ ， $\theta_{\min} = \theta_0/2$ ，求單擺從 $\theta = \theta_0/2$ 至 $\theta = \theta_0$ 的運動過程中，單擺繞鉛垂線(z 軸)轉動的角度 $\Delta\phi$ 。
 (F) 若 θ_0 不為小角度， $\theta_{\min} = \theta_0 - \alpha$ ，且 $\alpha \ll 1$ ，求單擺從 $\theta = \theta_{\min}$ 至 $\theta = \theta_0$ 的運動過程中，單擺繞鉛垂線(z 軸)轉動的角度 $\Delta\phi$ 。

$$\text{積分: } \int_{1/2}^1 \frac{dy}{y\sqrt{(1-y^2)(y^2-1/4)}} = \pi; \quad \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{dz}{\sqrt{\alpha-z^2}} = \pi/2.$$

五、彈簧的質量效應

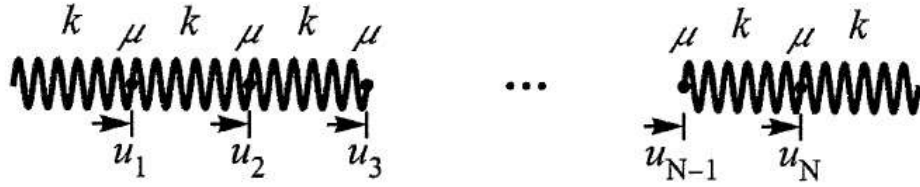


圖 5

如圖 5 所示，將彈簧視為 N 個質點，每個質點的質量皆為 μ ，且相鄰的質點都以力常數為 k 、自然長度為 l_0 之小彈簧連接。以 $u_1, u_2, \dots, u_N$ 表示這些質點的位置，且不考慮任何的側向運動。

- (A). 將 u_1 透過小彈簧垂直懸掛在天花板，以天花板的位置為 z 軸原點，且將朝下的方向定為 z 軸正向。在 u_N 下方的小彈簧另一端掛上一個質量為 M 的質點，用 u_{N+1} 來描述這個質點的位置，列出 $u_1, u_2, \dots, u_{N+1}$ 所滿足的運動方程式。
- (B). 當此系統在重力作用下達到靜態平衡時 $u_j = \eta_j$ ，若 $\eta_j = a_1 j + a_2 j(j+1)$ ，求 a_1, a_2 。
- (C). 承(B)小題，考慮彈簧的連續性極限： $l_0 \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ 。在這個極限下，整個彈簧的自然長度、質量及力常數 $L_0 = Nl_0$ 、 $m = N\mu$ 及 $K = k/N$ 都會趨近於定值。令 $jl_0 = s$ ， s 是一個連續參數， $0 \leq s \leq L_0$ ，可用來描述彈簧上各點的位置，且 $\eta_j \rightarrow \eta(s)$ 。若 $\eta(s) = b_1 s + b_2 s^2$ ，求 b_1, b_2 。
- (D). 承(C)小題，求整個彈簧的伸長量 ΔL 及整個系統之質心位置 X_0 ，以 m, M, g, K, L_0 表示之。
- (E). 由(A)小題的結果，考慮彈簧的連續性極限： $l_0 \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0, j \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$ ， $u_j(t) \rightarrow u(s, t)$ 。若已知此彈簧的線質量密度 $\lambda = m/L_0$ 、楊氏係數 $Y = KL_0$ ，求 $u(s, t)$ 所滿足的微分方程式。
- (F). 將此彈簧及質點的系統放在光滑的水平面上，並以 $s = 0$ 處為旋轉軸的中心點，作等角速度的旋轉。若角速度為 Ω ，求 $u(s, t)$ 所滿足的微分方程式及邊界條件。
- (G). 承(E)小題，當此系統處於穩態時， $u(s, t) = \eta(s)$ 。若已知 $\eta(s) = A_0 \sin(B_0 s)$ ，求 A_0 及 B_0 。