

2020年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2020年5月6日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙**正面**上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2020 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、 量子光學

光有粒子與波動的雙重性，光波可以用在古典力學中的一維簡諧振盪子來描述，量子光學是奠基於將電磁場量子化，用簡諧振盪子的量子態來表示光子的量子狀態。

A 部份:

考慮電磁波在一邊長為 L 的正方形空腔內傳播，空腔體積為 V ，如圖 1 所示。其中電場可表為

$$E_x(z, t) = E_0 \sin(kz) \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

式(1)中 E_0 為振幅， $k = 2\pi/\lambda$ 為波向量， ω 為角頻率， ϕ 為相位角。在以下(i)至(iii)小題中，考慮 $\phi = 0$ 。

(i) 空腔內電磁波的磁場分量可表示為 $B_y(z, t) = B_0 f(z, t)$ ，求出 E_0/B_0 與 $f(z, t)$ 的函數形式。

(ii) 求出此電磁波在空腔內的總能量 $E(t)$ 。

(iii) 現在引入兩座標量 $q(t)$ 與 $p(t)$ ，其中 $q(t) \propto \sin(\omega t)$ ，

$p(t) \propto \cos(\omega t)$ ，則 $E(t)$ 可表為

$$E = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2)$$

寫出 $q(t)$ 與 $p(t)$ ，以 V 、 E_0 與 ω 來表示。

註:此處 $p(t) = dq/dt$ ， $dp/dt = -\omega^2 q(t)$ ，式(2)可類比為古典力學中的一維簡諧振盪子的能量形式。

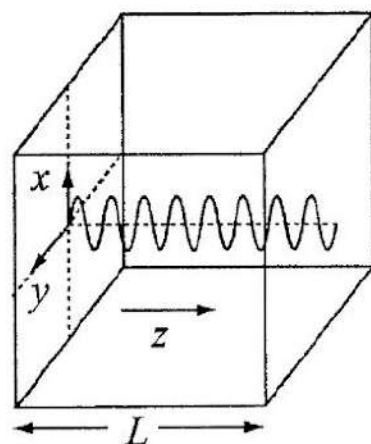


圖 1

B 部份:

在量子力學中，一維簡諧振盪子(如式(2)所示)的能量可以表為

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (3)$$

此處 n 可視為光子數， $\hbar = h/(2\pi)$ ， h 為普朗克常數。 q 與 p 滿足海森堡測不準原理，即

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar/2 \quad (4)$$

現將式(1)改寫為

$$(iv) E_x(z, t) = \sqrt{\frac{4\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} E_0 \sin(kz) \{ \cos \phi X_1(t) + \sin \phi X_2(t) \}$$

其中 $X_1(t) = \eta q(t)$ ， $X_2(t) = \xi p(t)$ 。求出參數 η 與 ξ 。

在量子光學中習慣用相量圖(Phasor diagram 即 X_1 - X_2 圖)來描述電場的正交性(quadrature)。光子的量子態 α 可以在 X_1 - X_2 相量圖 2 中以 $\alpha = X_1 + iX_2$ 表示。

(v) 求 $|\alpha|$ ，以 V 、 E_0 與 ω 表示之。

(vi) 考慮電磁波的平均能量，且 $n \gg 1$ ，可得 $n = |\alpha|^2$ 。求常數 a 。嚴格來說此處要考慮空腔內平均光子數，即 n 以 $\bar{n}$ 表示。

(vii) 由式(3)得知，當沒有光子時($n = 0$)，此系統仍具有 $\hbar\omega/2$ 的能量，此能量被稱為零點能量(zero-point energy)。零點能量可視為由真空漲落(vacuum fluctuation)所引起。現在考慮零點能量是由真空中電場漲落 E_{vac} 所引起，求 E_{vac} 。

在古典理論中真空電場 E_0 為零。量子理論中漲落電場 E_{vac} 會造成 X_1 與 X_2 的不確定性 (即圖2中的灰暗區)。

(viii) 光子的量子態在 X_1 - X_2 相量圖滿足 $\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \gamma$ ，求常數 γ 。

(ix) 上題 X_1 與 X_2 相量的不確定性亦可表為 $\Delta n \Delta \phi \geq \zeta$ ，求常數 ζ 。

此不等式表示光子具有粒子數目(n)與波相位(ϕ)的不確定性。

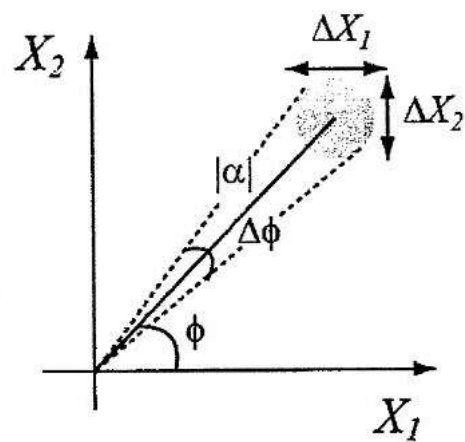


圖 2

二、霍爾電阻

(A) 考慮一個處於均勻磁場 $\vec{B}$ 的金屬平板，如圖 3 所示。已知帶電粒子在金屬中的運動方程式為 $(d\vec{p}/dt) = -(\vec{p}/\tau) + \vec{f}(t)$ ；其中 τ 為一時間常數，代表粒子的平均碰撞時間，

$\vec{p}$ 為粒子平均動量， $\vec{f}(t)$ 為外力。電流密度定義為 $\vec{j} = ne\vec{v}$ ， $\vec{v}$ 為粒子速度， e 為粒子電

荷， n 為單位體積的粒子數目。若 $\vec{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ 處於穩定態 (steady state)，且 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ， $\vec{E}$ 為

電場。我們可以將 $\vec{j}$ 表示成 $j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z$ ，

$j_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z$ ， $j_z = \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z$ 。試求所有 σ_{ij} ，

$i, j = x, y, z$ 。將答案以 $\sigma_0 = (ne^2\tau/m)$ ， $\omega_c = (eB/m)$ 和 τ 表示之。

(B) 若將此問題改寫成 $\vec{E} = \rho \vec{j}$ ，試求所有 ρ_{ij} 。

(C) 在霍爾量測 (Hall measurements) 中，霍爾電阻定義為 $R_{xy} = V_y/I_x$ 。 V_y 為平板在 y 方向的兩端電位差， I_x 為通過的電流。圖 4 顯示一個二維金屬平面的霍爾量測數據。若此二維金屬面由晶格常數 0.3926 nm 的正方形所組成，試求每一晶格的帶電粒子數。

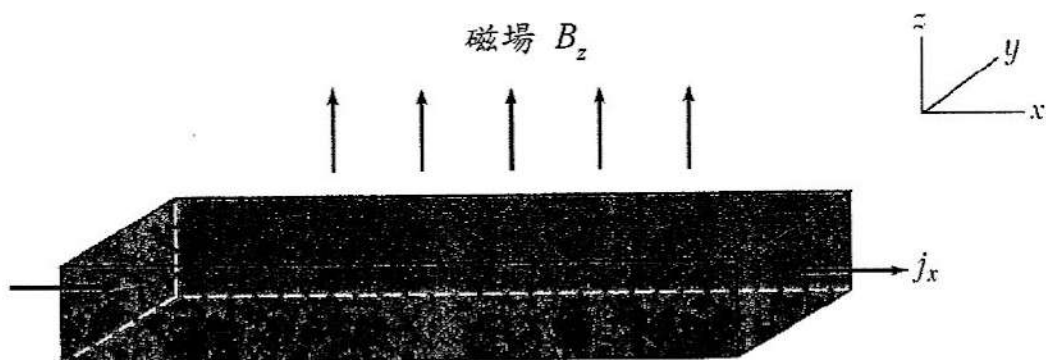


圖 3

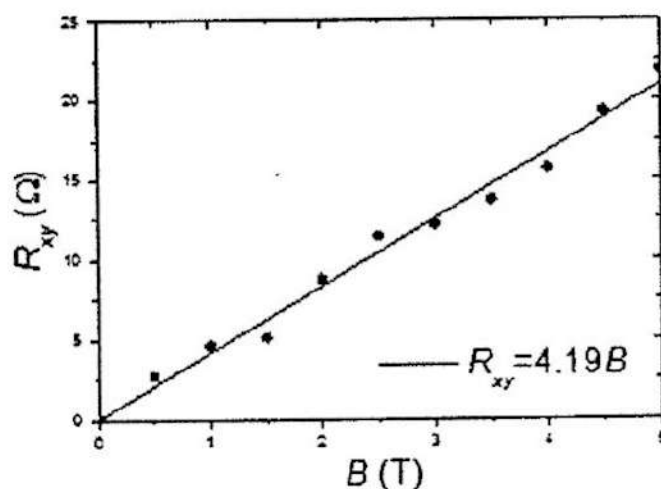


圖 4

三、振動陀螺儀的解析力

陀螺儀是在地球上用來感測與維持方向的裝置，以往大都運用角動量守恆的原理來維持方向。現在的電子產品中的陀螺儀則常使用振動陀螺儀。圖 5 是一個振動陀螺儀的簡化模型。在一邊長為 $2a$ 的方形光滑平台上置放一個質量為 m 之質點，此質點以彈力常數為 $m\omega_0^2/2$ 的四個理想彈簧連接到 $(a, 0)$ 、 $(-a, 0)$ 、 $(0, a)$ 與 $(0, -a)$ 等四點，質點的振動可以用來感測平台的轉動，進而定出方向(完全定出方向需要 3 個陀螺儀)。假設彈簧的原長可被忽略，試回答以下問題：

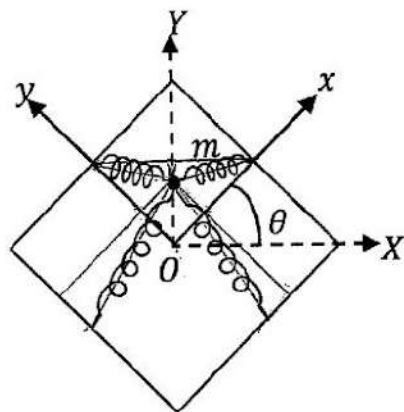


圖 5

(A) 當平台沒有轉動時，在圖示中的 xy 座標系中，質點

的位置為 (x, y) ，寫下質點的運動方程式。

(B) 當平台以角速度 Ω 轉動時，設圖示中的 XY 座標系為一慣性座標系，而 xy 座標系則為一轉動座標系。在時間 $t = 0$ 時， XY 座標系與 xy 座標系重合，因此 $\theta = \Omega t$ 。質點相對於平台系統的位置記為 (x, y) ，它所對應的慣性座標為 (X, Y) ，且 $x = X \cos \theta + Y \sin \theta$ ， $y = -X \sin \theta + Y \cos \theta$ 。試求質點在平台系統的運動方程式，並且說明質點在平台系統的運動可以視為質點在一位能 $V(x, y)$ (定 $V(0, 0) = 0$) 下，並受到一垂直於平台的等效磁場 B (將質點的等效電荷設為 1) 作用，試求 $V(x, y)$ 與 B (以出平台面為正)。

$$\text{註：} \frac{d \cos \theta}{dt} = -\Omega \sin \theta, \quad \frac{d \sin \theta}{dt} = \Omega \cos \theta$$

(C) 當振動陀螺儀以角速度 Ω 轉動時，質點在平台系統的運動可以用 (x, y) 或極座標 (r, ϕ) 來描述，如圖 6 所示 (為簡化起見，彈簧並未標示出)。此時質點運動因受到等效磁場的作用，角動量不再守恆。我們可以將角動量作適當的推廣使其守恆，稱之為推廣的角動量。試求此守恆的推廣角動量，以 $r, d\phi/dt, m, \Omega$ 表示之。在某個特定角速度下，此質點可作穩定圓周運動，求此角速度，以 r, m, Ω, ω_0 表示之。試問質點作圓周運動時，在什麼情況下只能有單一方向的轉動？

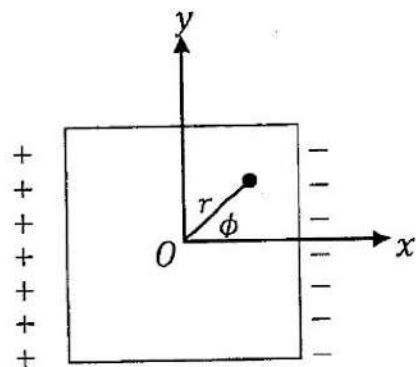


圖 6

此時是順時針還是逆時針轉動？

(D) 為了讓振動陀螺儀可以測量轉動，今讓質點帶電荷 q ，並且將平台做成電容，在邊界 $x = \pm a$ 處放置帶電的金屬板，以產生均勻的振盪電場 $E_0 \cos \omega t$ ，此時測量質點在 y 軸方向的運動便可測得振動陀螺儀有無轉動。假設 $\omega_0 > \Omega$ ，並且質點相對於平台運動時，受到一與速度 $\vec{v}$ 成正比的阻力 $-2m\beta\vec{v}$ ($\beta > 0$)，且阻力夠小使得質點仍可做振盪運動。

(i) 試問質點作穩定運動的軌跡曲線為何？

(ii) 若欲測量轉動，則質點在 y 軸方向運動的振幅愈大愈好，這可由調整電場振盪的頻率，使沿 y 軸運動的振幅達到最大即可(此即共振)。忽略 β 的修正，試求系統的共振角

頻率 ω_R 量值。由此說明如何測量穩定轉動的角頻率。

(iii)能否測量到穩定轉動的角速度與共振的品質因子 Q 有關，即 y 軸運動振幅對電場振盪角頻率 ω 之關係要能展現最大值的高峰。若高峰的寬度為 $\Delta\omega$ ，則品質因子約為 $Q = \omega_R/\Delta\omega$ 。試估計各共振角頻率之品質因子。在品質因子極大($Q \gg 1$)的情況下，試求由共振角頻率能解析出轉動角頻率的條件。

四、長度與時間轉換

如圖 7 所示，慣性座標系 S 的原點為 O 。一根剛尺上的 P^* 與 O^* 處各有一道刻度線，慣性座標系 S^* 的原點固定於 O^* 處，在兩座標系原點上各有一觀測者。座標系 S 的 x 軸與座標系 S^* 的 x^* 軸共線，且兩座標系之間沿 x 軸有相對運動，其速率固定為 v 。當 O 與 O^* 重合時，兩座標系原點的時間均為 0。已知真空中的光速為 c ，而 $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 。

A 部分

將剛尺固定在座標系 S^* 中， S^* 以等速率 v 沿 $+x$ 軸移動，而座標系 S 則為靜止不動。

已知 t 為在 S 系中測得 P^* 到達 O (即 P^* 與 O 重合) 的時刻。

令 l 與 l^* 分別代表在座標系 S 與 S^* 中所量得之線段 P^*O^* 的長度 $\overline{P^*O^*}$ 。

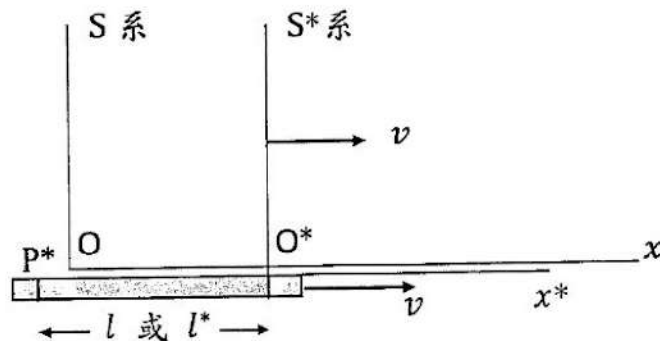


圖 7

- (i) 試求兩座標系所測得之長度 l 與 l^* 的比值。
- (ii) 若如所給已知條件，在 S 系原點 O 之觀測者測得 P^* 到達 O 的時間為 t ，則對 S^* 系的觀測者而言， P^* 到達 O 的時間 t^* 為何？ t^* 與 t 的比值為何？
- (iii) 若在 S 系原點 O 之觀測者測得 P^* 到達 O 的時間為 t ，則此時在 S^* 系原點 O^* 的時鐘讀數 t_0^* 為何？ t_0^* 與 t^* 的比值為何？

B 部分

在本部分中，與 A 部分相反，改為將座標系 S^* (與剛尺) 視為靜止，而將座標系 S 視為沿 $-x^*$ 軸以等速率 v 運動；但如同 A 部分，當 O 與 O^* 重合時，兩座標系原點的時間均為 0。

已知在本部分所述情況下，在 S^* 系中之觀測者測得的 $\overline{P^*O^*}$ 長度為 $L^* = l^*$ ，試求：

- (iv) 在將 S^* 系視為靜止座標系的情況下，當 S^* 系 (及其原點 O^*) 的時間為 $\bar{t}^* = t_0^*$ 時，在 S 系中，其原點 O 的時間 $\bar{t}$ 為何？此處 t_0^* 是 A 部分 (iii) 題所述當 S 系在

時刻 t 測得 P^* 到達 O 時，在 S^* 系原點 O^* 的時鐘讀數。

- (v) 在 S^* 系中之觀測者測得 O 到達 P^* 的時間 T^* 為何？在 S 系中之觀測者測得 O 到達 P^* 的時間 T 為何？當 S 系的時間為 T (在 S 系中測得 O 到達 P^* 的時刻)時，在 S^* 系中原點 O^* 的時間 $\bar{t}_{O^*}$ 為何？若在 S 系中測得的 $\overline{P^*O^*}$ 長度為 L ，則兩長度的比值 L^*/L 為何？
- (vi) 若在 S 系時間為 T 時，位於 O 的觀察者發射一信號，以速率 c' (相對於 S^* 系)傳給 O^* ，以便通知在 O^* 的觀察者說 O 已到達 P^* ，則欲使此信號能在 S^* 系時間為 T^* 之前到達 O^* ， c' 至少須為何？

五、手徵(chiral)材料的繞射

利用繞射辨別左旋/右旋對稱的一維晶格結構：

先考慮一維晶格的繞射：

- (A) 對圖 8 中的入射波(波向量量值為 k)，入射角為 θ ，繞射波的波向量 $\vec{k}'$ (長度不變) $= (k, \theta', \phi')$ ，求繞射波建設性干涉時 θ' 的條件。

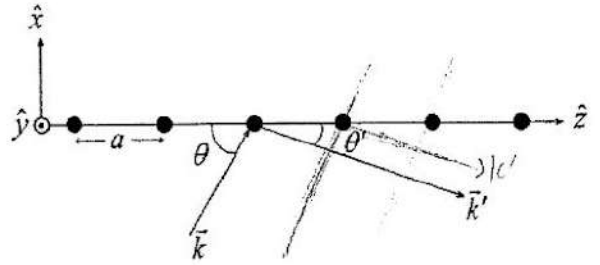
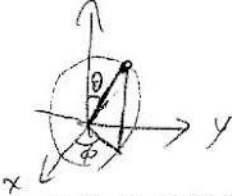


圖 8



- (B) 若每一個晶格點所發出的繞射波的振幅與該格點上的入射波成正比，且所發出的繞射波皆為球型波，則該繞射波
- $$\psi_{\text{inc}}(\vec{R}_m) \left\{ e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_m|} / |\vec{r}-\vec{R}_m| \right\} \approx \psi_{\text{inc}}(\vec{R}_m) \left\{ e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_m|/r} \right\}$$
- 。在繞射波的公式中，觀察點位置滿足 $r \gg R_m$ 的條件，

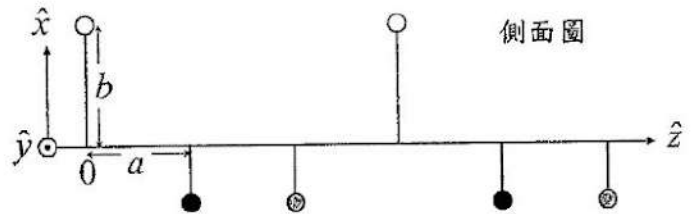
其中 $r = |\vec{r}|$,

$R_m = |\vec{R}_m|$ 。今已知 $\psi_{\text{inc}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$,

$\vec{R}_m = ma\hat{z}$ ，求 N 個格點所產生的繞射波 ψ_D 。

- (C) 從 ψ_D 中找出繞射波建設性干涉的條件。

考慮左旋/右旋對稱的一維晶格結構之繞射：

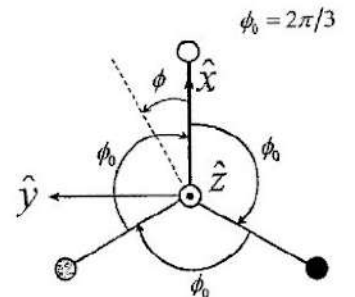


側面圖

圖 9

圖 9 為右旋對稱的一維晶格，小圓球代表原子，是產生繞射波的地方。我們忽略原子連接的細棒之繞射效應，細棒長度皆為

b ，兩相鄰細棒在 z 軸方向的距離為 a 。另外兩相鄰細棒間隨著其 z 軸座標增加，有一個相對轉動角 $\Delta\phi = \beta\phi_0$ 。 $\beta = \pm 1$ ， $\phi_0 = 2\pi/3$ 。圖 10 中為 $\beta = -1$ (即順時鐘方向轉動)的情形。 β 的數值代表兩個不同的手徵對稱。



沿 $-\hat{z}$ 方向俯視圖

圖 10

- (D) 原子位置 $\vec{R}_m = \vec{\rho}_m + ma\hat{z}$ ，求 $\vec{\rho}_m$ ，其中 β 待定。

- (E) 試以 $m = 3M + j$, $j = 0, \pm 1$; $\vec{k}$ 與 (A) 小題相同, $\vec{k}' = (k, \theta', \phi')$, 求 ψ_D 。
從 ψ_D 中找出繞射波建設性干涉的條件。
- (F) 以下考慮特殊情形: $\theta = \pi/2$, $a = b$, $\lambda = a$, 並且繞射波建設性干涉的條件固定在第一階, 求繞射波強度 I (即 $I = |\psi|^2 = \psi\psi^*$) 與 ϕ' 的關係。
- (G) 試將 $\phi' = \pi/2 + \varphi$ 代入 $I(\varphi)$ 中, 並證明 I 為 φ 的偶函數。
- (H) 討論 $\beta = \pm 1$ 手徵晶格的繞射波強度 I 在 $\varphi \approx 0$ (或 $\phi' \approx \pi/2$) 時的特性表現。