

2020年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2020年5月5日 08:10-13:10

- 一. 本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。
- 二. 考試時間五小時。
- 三. 限以藍色或黑色原子筆作答。
- 四. 在指定的正面答案紙上作答。
- 五. 可使用無程式掌上型計算機。
- 六. 在每題開始時換用新頁。
- 七. 在每一頁答案紙的頂端寫明：
 - 題號
 - 該題所用答案紙之頁碼
 - 該題所用答案紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

—	1	1/3
—	2	2/3
—	3	3/3

2020 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。

一、重力透鏡產生的光偏折

根據廣義相對論的等效原理，在均勻重力場 g 中的物理定律，與在無重力之下、加速度 $a = -g$ 的實驗室中所觀察到的，完全一樣。

在非均勻重力場中，此原理可以更具一般性的說成是：在一個自由下落的小實驗室中，觀察到的物理定律與在無重力下的狹義相對論是完全一樣的。所謂自由下落是指運動過程中受到的外力只有重力。

(i)考慮在均勻重力場 g 中，位置的高度差為 h 的兩個時鐘 A 和 B，如圖 1 所示：

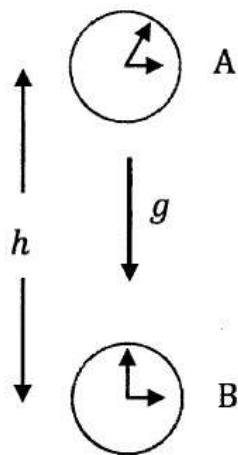


圖 1

已知真空中的光速為 c ，且 A 和 B 處使用完全相同的兩個時鐘(原子鐘)，其計時功能不受加速度的影響。今從 B 處發出一個頻率為 f_B 的光波信號，如欲求出在 A 處收到此信號時，以時鐘 A 所量得的頻率 f_A ，可考慮一個在重力場中以加速度 g 自由下落的座標系 S，在 S 系中 A 和 B 兩個時鐘都沿 B 到 A 的方向(與重力場方向相反)加速。假設 B 發出信號時($t = 0$)，它相對於 S 座標系為靜止。

依據等效原理，在 S 座標系中，適用狹義相對論。已知在重力場中，當 h 夠小時，光波信號的頻率偏移比率可表示為

$$\frac{f_B - f_A}{f_B} = \alpha \frac{gh}{c^2} \quad (1)$$

試求出 α 。

(ii)假設兩處均以相同的原子發出同一頻率的光子來計時，則前題(i)中的頻移，可看成為相同的時鐘，因 A 和 B 處的重力場不同，以致快慢不同所引起的。若(1)式中的 α 為正值，可視為在 B 處的時鐘週期 Δt_B ，比在 A 處的時鐘週期 Δt_A 為長(即 $\Delta t_B > \Delta t_A$ ，B 處

的時間膨脹)，故在 A 處所測得來自 B 處的光子，其頻率 f_A 較低；反之，則在 B 處的比在 A 處的為短(時間收縮)。由於在(i)題所用的 S 座標系，適用無重力下的狹義相對論，因而時間膨脹必伴隨著相同倍數的長度收縮。故由等效原理，在重力場中的 A 和 B 處，也會出現相同倍數的時間膨脹和長度收縮，即若 A、B 處量得的波長為 Δl_A 、 Δl_B 時，則 $\Delta l_A/\Delta l_B = \Delta t_B/\Delta t_A$ 。

假設 $\Delta t_B/\Delta t_A = \gamma$ ，在 A 處的光速為 c_A ，而在 B 處的光速為 c_B ，則光速比 c_A/c_B 為何？

(iii) 假設一星球可視為半徑 R 、質量 M 的均勻球體，並以其球心為極座標系原點(即其徑向座標 $r = 0$)。令 G 為重力常數，並假設 $GM \ll Rc^2$ ，依據(ii)的結果，若原子由此星球表面(B 處)發出頻率為 f_R 的光，則在此星球的重力場中，在重力為零的無窮遠處(A 處)測得的光頻率 f_∞ 可表示為

$$f_\infty = \left(1 + \frac{k}{R}\right) f_R \quad (2)$$

試求出常數 k 。

(iv) 承上(ii)與(iii)小題，已知光在無重力場下(或重力為零處)的速率，等於真空中的光速 c ，則依據(ii)與(iii)的結果，對位於無重力處的觀測者而言，在星球的重力場中，距離原點(星球中心)為 r 處的光速 $c(r)$ 為何？光在距離原點為 r 處的折射率 $n(r) \equiv c/c(r)$ 為何？

(v) 承上(iv)，令光線前進方向與徑向的夾角為 θ ， (r, φ) 為平面極座標，沿光線的路徑長為 s ，如圖 2 所示：

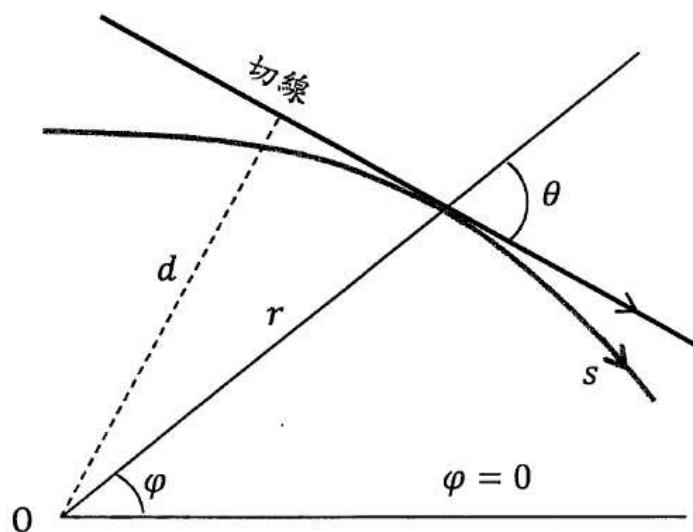


圖 2

依據 Bouguer 公式，當介質的折射率 $n(r)$ 具有球對稱性時，司乃耳定律需修改為：

$$rn(r) \sin \theta = n(r)d = \text{定值} \quad (3)$$

當光線以碰撞參數 $b > R$ ，由星球左側無窮遠處射進時(亦即 $r \rightarrow \infty$, $\varphi = \pi$)，由於重力場的透鏡折射效應(即光線偏折現象)，在光線掠過星球($r \approx R$)並到達右側無窮遠處時，

其前進方向會偏折一個角度 $\Delta\varphi$ 。

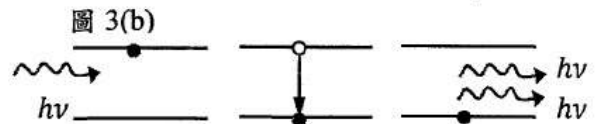
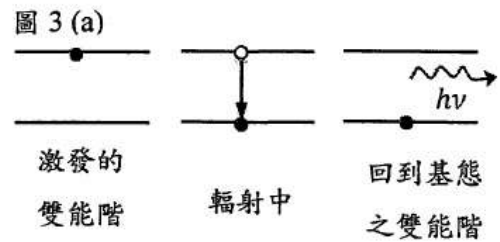
試求描述光線軌跡的方程式(即求出 $dr/d\varphi$ 所滿足的方程式)，並據以解出 $\Delta\varphi$ 。

注：可能有用的數學公式：

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\sin^{-1} \frac{x}{a} \text{ 在第一與第四象限})$$

二、自由電子雷射中電子與光的交互作用

當光在介質中傳播時，可以與介質中的電子交互作用，這會造成光強度隨傳播而放大或衰減。在微觀光子的層面，有兩個重要的過程，一為自發輻射 (spontaneous emission)，此時電子可自行輻射光子，電子在輻射出光子後會從激發態回到基態。如圖 3(a) 所示，處於激發態的雙能階原子(能階為 E_2 與 E_1 ， $E_2 > E_1$ ，光子能量為 $h\nu = E_2 - E_1$) 的自發輻射過程；另一個過程為誘發輻射 (stimulated emission) 如圖 3(b) 所示，此時處於激發態的電子受到原本就存在於空間中的相同能量之光子的影響而產生輻射，其輻射機率除了與電子躍遷機率正比外，還與原子所處環境之光能量密度成正比，其逆過程為誘發吸收，也滿足相同的關係。試回答以下問題：



(A) 已知普朗克黑體輻射定律亦可以使用熱平衡的絕熱空腔中之單位體積中每單位頻率之輻射(電磁波)能量密度 $u(\nu, T)$ 表示，當溫度為 T 時， $u(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$ (此處 h 為普朗克常數， k_B 為波茲曼常數)。現在考慮絕熱空腔中除了電磁波外，尚包括 N 個如圖 3(a) 所示之雙能階原子，假設電子由能階 2 躍遷到能階 1 之自發輻射機率為 A ，誘發躍遷機率為 B_{21} ，由能階 1 到能階 2 之誘發吸收機率為 B_{12} ，當系統達熱平衡、溫度為 T 時，試由普朗克黑體輻射定律推論求出 A/B_{21} 與 A/B_{12} 。

(B) 承(A)小題，如圖 4 所示，頻率為 ν 、光強度為 I_0 之入射光射入一含雙能階原子的介質。假設能階 1 與 2 之原子數固定為 N_1 與 N_2 ，且在介質中均勻分布，已知介質的截面積為 a 、長為 l ，試求光離開介質時的強度。在什麼條件下，入射光強度可隨介質長度 l 做指數增長，而被巨量的放大？

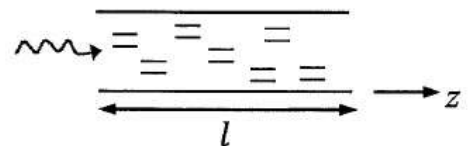


圖 4

除了透過介質中原子的電子與光(電磁波)交互作用以達到光強度的放大外，亦可藉由外加電場或磁場加速電子，使電子與電磁波產生交互作用進而達到光強度的放大，其中典型的例子為自由電子雷射。如圖 5 所示，自由電子雷射利用磁極交錯[稱為聚頻磁鐵 (undulator)] 的安排產生磁場 $\vec{B} =$

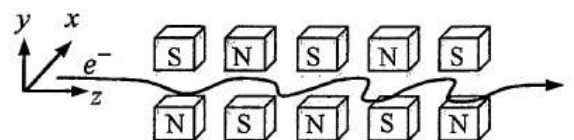


圖 5

$(0, B \sin k_u z, 0)$ ($k_u = 2\pi/\lambda_u$, λ_u 為磁場在空間變化的週期)，此磁場可加速入射的電子產生電磁波，再與電磁波交互作用發生誘發輻射而放大電磁波達到雷射輸出。已知電子束由原點 $(0,0,0)$ 入射，且電子的初速度 v_0 沿 z 軸方向，設電子質量、電荷分別為 m 與 $-e$ ，

$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$ ，電子的速度接近光速 c ， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \gg 1$ ，需考慮相對論效應，試回答

以下問題：

(C)試求電子 z 軸位置為 z 時之橫向速度與光速的比值 β_x 與 β_y ($\vec{\beta} = \vec{v}/c$)，並由此估算 β_z 的沿 z 軸的平均值 $\bar{\beta}_z$ ，精確到 $O(\gamma_0^{-2})$ ，以 γ_0 與 K 表示之，其中 $K \equiv (eB)/(mck_u)$ (無因次)。

註：(1)電子的運動與時間的關係來自電子 z 軸座標 $z(t)$ 。(2) $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

(D)承(C)小題，由於電子受到聚頻磁鐵作用而在 x 方向運動，其 x 座標也隨 z 座標作週期變化，同時電子因加速而輻射電磁波(此為自發輻射)，類似強迫的簡諧振盪，電子束經聚頻磁鐵所輻射之電磁波會產生共振輻射。已知接近光速的電子所輻射的電磁波集中在非常窄的圓錐內，即輻射方向可視為固定。考慮在不同位置的電子

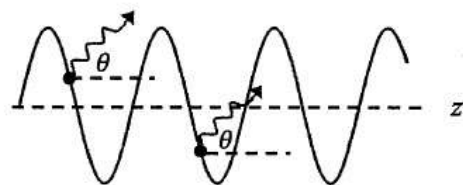


圖 6

所輻射之電磁波，如圖 6 所示。其輻射方向為 θ ，假設 β_z 可近似為定值 $\bar{\beta}_z$ ，若忽略不同電子輻射時的隨機相位，試求 $\theta = 0$ 時電子共振所輻射的電磁波波長 λ_r ，精確到 $O(\gamma_0^{-2})$ ，以 γ_0 與 K 表示之。

(E)除了聚頻磁鐵的磁場外，現在電子也受到其所輻射出的電磁波之電磁場影響。假設電磁波電場為 $\vec{E} = (E_0 \cos(kz - \omega t + \phi), 0, 0)$ ，其中 $k = 2\pi/\lambda$ ，當電子入射點為 $z = 0$ 時， $\phi = 0$ ，則電子與電磁波交互作用如下：

(i)電子能量的時變率 $d(mc^2\gamma)/dt$ 與 $d\gamma/dt$ 成正比，已知電子 z 軸座標值為 z 時之 $d\gamma/dt$ 可表示為 $d\gamma/dt = A[\cos(\Phi + \phi) + \cos(\bar{\Phi} + \phi)]$ ，試求 A 、 Φ 與 $\bar{\Phi}$ 。

(ii)電子能量的時變率(正比於 $d\gamma/dt$)沿其 z 軸座標值的平均，為電子與電磁波交互作用交換能量的指標。假設 β_z 可近似為定值 $\bar{\beta}_z$ ，並且在 Φ 與 $\bar{\Phi}$ 表示式中之 $\bar{\beta}_z$ 可以無電磁波時之值估計(即 $\gamma \approx \gamma_0$)，若只精確到 $O(\gamma_0^{-2})$ ，試求能使 $d\gamma/dt$ 沿 z 軸的平均值達到最大的電磁波波長 λ_m 。

(F)對電子束來說，每一個電子所輻射的電磁波的隨機相位並不一定相同，因此要使電子束所輻射電磁場達最大，必須使每個電子輻射出的電磁波同調，才能達到輸出光為雷射等級。已知在相距一個波長內的電子所輻射出的電磁波可達同調，而電磁場與電子交換能量可使電子產生群聚(bunching)效應而使運動中之電子束裡的電子密度在 z 軸方向的週期為 λ_0 。(i)設電子束中央點入射時 $z = 0$ ， $\phi = 0$ ，試求出相對中央點， z 座標為 z_0 點的時變率 $d\gamma/dt$ 。(ii)由此進一步推論電子共振所輻射電磁場中 λ_0 的量值，並說明為何這個效應能使所輻射的電磁波同調。

三、電荷在金屬中的屏蔽位能以及形成電子束縛態的條件

考慮一個質子(電荷為 e)在金屬中所形成，對電子的位能 $U(r)$ 。已知質子在真空中對電子所形成的位能為 $U_c(r) = -\kappa_0 e^2/r$ ，金屬中的電子數之密度為 n_0 ，電子質量為 m 。

首先考慮沒有外加電荷情形下的金屬，此時電子的位能 $U(r)$ 為零。由於包立不共容原理，

每一個電子必須處於不同的狀態。電子的自旋有兩個狀態，因此每一個波向量 $\vec{k} =$

(k_x, k_y, k_z) 可提供兩個不同的電子狀態：

(A) 若金屬在一維(如 x)方向的長度為 L ，電子的物質波函數在 $x = 0$ 與 $x = L$ 為相同，求電子波向量 k_x 的量子化條件。

(B) 若電子在金屬中的最大波向量之量值 $|\vec{k}|_{\max} = k_F$ ，且 n_0 與 k_F 滿足下列關係：

$n_0 = ak_F^b$ ，求 a 與 b 。並求出將 n_0 以 E_F 表示的表達式。

有外加電荷(如質子)時， $U(r)$ 不再是零，但 E_F 會維持不變(如圖 7 所示)。此時電荷密度 n 會隨位置而改變。以下各小題的答案必須以 k_F (取代 n_0)表示之。

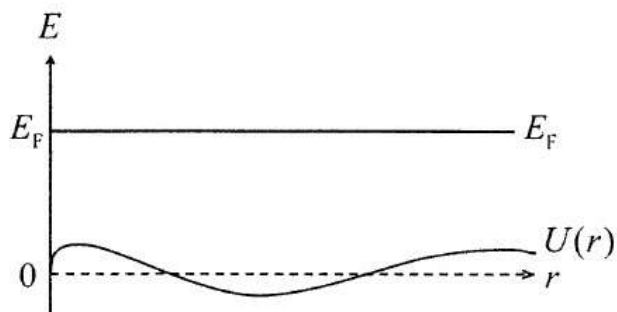


圖 7

(C) 試依據(B)小題中 n_0 與 E_F 的關係，引進 $U(r)$ ，並寫下 $n(r)$ 與 E_F 的關係。

(D) 假設 $E_F \gg U(r)$ ，且 $U(r)$ 在空間上的改變足夠緩慢，可令 $n(r) = n_0 + \delta n(r)$ ，則 $\delta n(r) = -\alpha U(r)$ ，求 α 。

(E) 寫下 $U(r)$ 以 $\delta n(r)$ 表示的積分表達式。

(F) 將(E)小題中的 $\delta n(r)$ 以 $U(r)$ 替換，寫下以 $U(r)$ 表示的積分關係式。

(G) 將(F)小題的 $U(r)$ 積分關係式乘以 r 後，對 r 微分兩次，得 $\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} = \beta^2 U$ ，求 β 。

(H) 試將 $U(r) = U_c(r)f(r)$ 代入(G)小題中的方程式，求 $f(r)$ 。這裡 $U_c(r) = -\kappa_0 e^2/r$ 為質子在真空中對電子所形成的位能。

(I) 考慮 $U(r)$ 是否能夠束縛一個電子：若 r_0 為電子束縛態的軌道半徑，求束縛態能量為負值的條件。

(J) 若我們能夠連續的改變 n_0 (或者 β)，使得這個量子系統恰好只有一個束縛態(能量小於零)。仿照波耳考慮氫原子的方法，求此時 β 的表達式。