

2021年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2021年4月3日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的“正面”答案卷上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2021 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、圓筒缺口截面積

截面積為 A 的圓柱型筒，放置在大氣的環境中，內裝不可壓縮且無黏滯的液體，側面底部有截面積 a 的圓孔。初始時液面到圓孔的垂直距離為 H ，液體才開始由圓孔流出，如圖 1 所示。

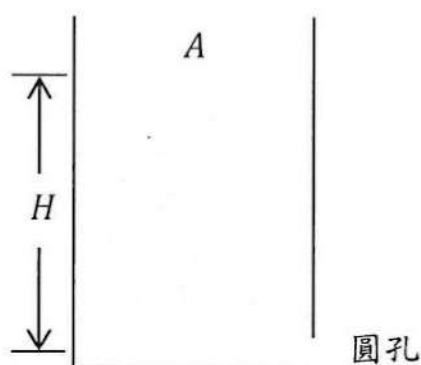


圖 1

- (a) 當 $A \gg a$ 時，在某時刻筒內液面由 H 的高度降至 h 時，在此時液體由圓孔流出的瞬時速率為何？
- (b) 已知 $A > a$ ；且 $A^2 \gg a^2$ 時，(即圓筒水位受到圓孔的影響不能夠忽略)則在某時刻筒內液面由 H 的高度降至 h 時，筒內液面下降的速率 V 與筒內水位高度 h 關係式為何？
- (c) 由(b)的結果求液面高度 h 與時間的關係式，並求得液體停止流出的時間，即水位下降到圓孔時的時間。
- (d) 由(b)的結果求 $V(t)$ ，即桶內液面下降的速率與時間 t 的關係式，以及圓孔流出的液體速率 $v(t)$ 。

二、靜電：高斯定律的應用

(注意：本題答案請以題給參數和真空電容率 ϵ_0 表示)

- (a) 如圖 2(a) 所示，一半徑為 R 的絕緣體球，內部均勻分佈有密度為 ρ 的正電荷，試計算距離該絕緣體球中心 r 處的電場。

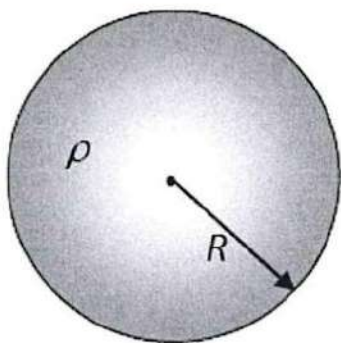


圖 2(a)

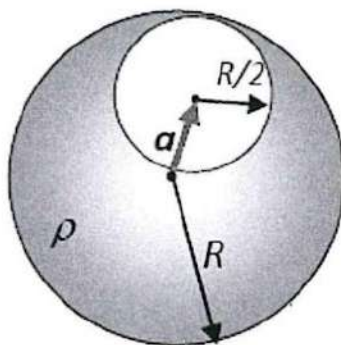


圖 2(b)

- (b) 若將圖 2(a) 之絕緣體球內部挖空一半徑為 $R/2$ 的球形空腔，且該絕緣體球中心與該空腔的中心連線之位置向量為 $\vec{a}$ ，如圖 2(b) 所示，試求該空腔內部以及空腔外絕緣體球內部任一點的電場。

- (c) 現考慮將半徑分別為 R_1 、 R_2 ，電荷密度分別為 $+\rho$ 和 $-\rho$ 的兩個均勻帶電絕緣球體重疊在一起，使二球中心距離為 d ($d < R_1 + R_2$)，如圖 2(c) 所示，試計算二球重疊部分內任一點的電場。

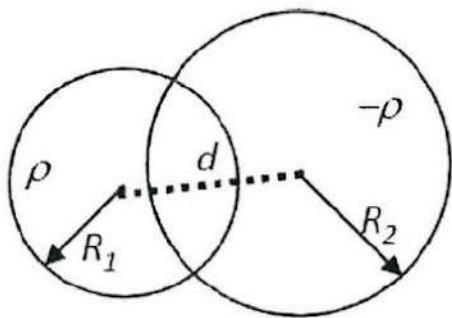


圖 2(c)

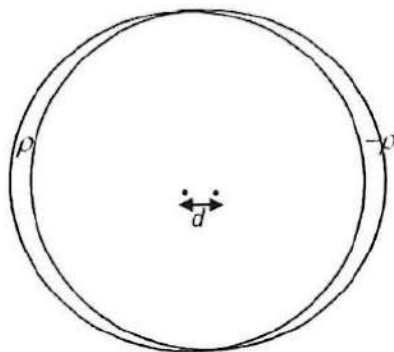


圖 2(d)

- (d) 如果(c)題中二球半徑均為 R ，且二球心間距離 $d \ll R$ ，即可將二重疊球近似為一左、右半球各有一密度為 σ 與 $-\sigma$ 面電荷的一層薄球殼，如圖 2(d) 所示。試求重疊後，該層薄球殼面電荷密度 σ 與球心位置連線角度 θ 的關係，最大面電荷密度 σ_0 之位置及量值，以及重疊後球體內部的電場強度。

- (e) 承上題，設無窮遠處電位為零，則重疊後球表面上任一點的電位為何？

三、太陽黑子與磁場

太陽是磁力活躍的恆星，根據在磁場中光譜線分裂的季曼效應測量(季曼效應是指原子光譜受磁場影響會發生分裂，分裂的大小正比於磁場的強度)，目前的測量精度大約為 3×10^{-5} T，太陽的基本磁場強度約為 10^{-4} T，但局部磁場很強，如有些黑子處磁場可達 0.3 ~ 0.4 T。太陽黑子是太陽光球在可見光下較周圍區域黑暗的斑點，由於強磁抑制了激烈的對流，而在表面形成溫度較低的區域。雖然溫度仍約有 3000-4500 K，但與周圍 6000 K 的物質對比之下，仍清楚顯示為黑點。

由分析太陽黑子光譜的季曼效應，發現某太陽黑子處的磁場可能高達 0.4 T。若我們假設此磁場是由電子聚成半徑約 10^7 m 的圓盤，以角速度 3×10^{-2} rad/s 繞圓盤中心旋轉而造成的，且此圓盤的厚度遠小於圓盤的半徑。

(a) 計算若要達到 0.4 T 的磁場，此圓盤上的電子面密度約為每平方公尺多少個電子？

(b) 圓盤中的電流約為多少安培？

(c) 若僅考慮自旋為零的正常季曼效應， 10^{-4} T 的磁場強度會造成譜線分裂多少 eV？相當多大的頻率間隔？(提示：自旋為零時的磁矩 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{eh}{4\pi m_e}$)

(d) 若太陽輻射可視為理想黑體，由斯特凡-波茲曼定律 (Stefan-Boltzmann law)：一個黑體表面單位面積在單位時間內輻射出的總能量與黑體本身的絕對溫度的四次方成正比，溫度 6000 K 與 3000 K 處每秒每單位面積發出的輻射能相差多少倍？

(e) 由描述黑體電磁輻射光譜輻射度的峰值波長與自身溫度之間反比關係的維因位移律 (Wien's displacement law)： $\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ ，溫度 6000 K 與 3000 K 的峰值波長為何？

假設太陽為正球形，重要物理特性參數如下：

質量 $M = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，半徑 $R = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$ ，表面溫度 $T = 6.0 \times 10^3 \text{ K}$ 。

可能用到之參數：

重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

波茲曼常數 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

質子質量 $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

電子質量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

基本電量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

普朗克常數 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

真空中的介電係數 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

真空中的磁導率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}^2$

四、改自 2018 初選考試第十三題(24)

如圖 3 所示，兩條垂直懸吊、力常數分別為 k_1 與 k_2 的彈簧，上端與跨繞過滑輪的不可伸長細繩連接，下端與質量為 m 、長度為 $2L$ 之均勻木條連接，木條繞其質心水平軸的轉動慣量為 I' 。滑輪的質量為 M 、半徑為 R ，繞其中心轉軸的轉動慣量為 I 。假設彈簧與細繩的質量均可忽略，滑輪可自由轉動，且細繩與滑輪之間無滑動。

- (a) 若木條受到微小擾動後，仍維持於原來的垂直面上，在平衡位置附近做微幅振動與轉動，則其簡正模振盪(即駐波式簡諧振盪)的角頻率 ω 為何？此等簡正模能存在的條件為何？
- (b) 承上題，若 $k_1 = k_2 = k$ ， $I = MR^2/2$ ， $I' = mL^2/3$ ，則角頻率 ω 為何？
- (c) 在什麼條件下，木條於微幅偏離平衡態後，恆可保持水平，其質心做垂直上下的簡諧振盪？此振盪運動的角頻率 Ω 為何？

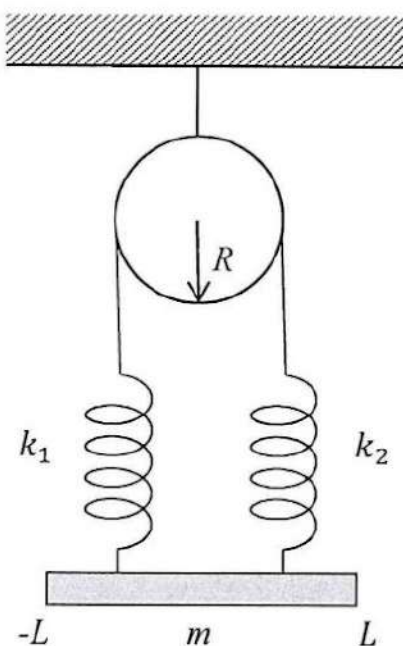


圖 3

五、力學能-電能轉換裝置

某生將一質量為 m 、長度 ℓ 之金屬棒接在一力常數為 k 之理想彈簧上後，架在一帶有儲存電能之電容 C 之電路上形成一力學能轉換電能的裝置，如右圖4所示。為了將力學能轉換電能，他將整個電路設置在一均勻外加磁場 B 中，且電路與磁場垂直，並使金屬棒能所架在電路線與電路垂直的方向上滑行，設電路的負載以電阻 R 表示，彈簧的原長可設為零，金屬棒與電路線間的摩擦可被忽略，且電路的自感以及連接電容之電路的電阻 r 可忽略不計，試回答以下問題：

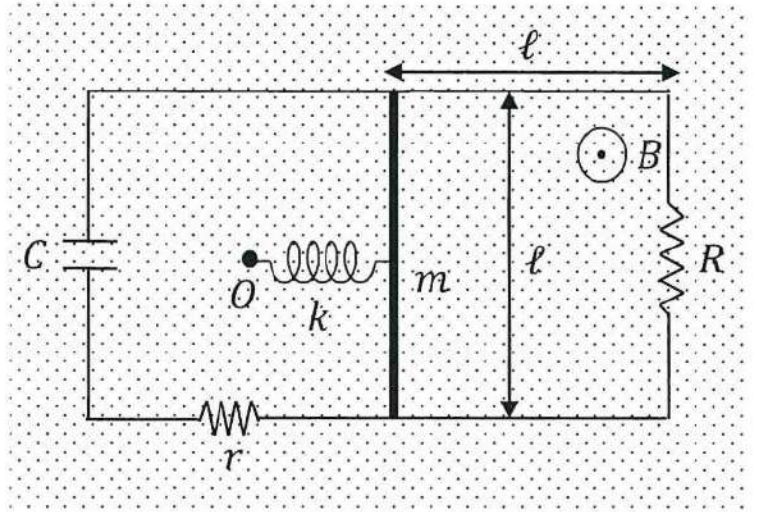


圖 4

- 當 O 點固定，試求金屬棒運動的固有角頻率 ω_0 (即不考慮阻力的共振角頻率)。
- 在 O 點固定的情形下，若在 $t = 0$ 時刻，彈簧伸長量為 0 ，但金屬棒的起始速度 v_0 ，此時忽略電阻 r 不計表示電容很快的被充電而帶電荷 q_0 ，試問 q_0 為何並求出能使金屬棒中電流在 $t > 0$ 發生振盪的磁場上限 B_c 。
- 欲將力學能轉換為電能，某生施力使 O 點作角頻率為 ω 之簡諧運動，即在 t 時刻之 O 點位移為 $a \cos \omega t$ ，其中 $a > 0$ 為振幅，假設 $B < B_c$ ，則當電流達穩定時，通過負載電阻 R 之電流可以表示為 $I(\omega) \sin(\omega t - \delta)$ ，試求 $I(\omega)$ 與 $\tan \delta$ (以 ω_0 、定義 $\beta = \frac{C(B\ell)^2}{2[mRC + R(B\ell)^2]}$ 等參數表示)。
- 接(c)小題，試計算平均輸入的力學能功率 $\langle P_{in} \rangle$ 與平均輸出的電功率 $\langle P_{out} \rangle$ 。並由此計

算力學能轉換電能的效率 $\eta \equiv \frac{\langle P_{out} \rangle}{\langle P_{in} \rangle}$ 以及使輸入的力學能功率 $\langle P_{in} \rangle$ 最大值之角頻率 ω ；

這裡的平均是對時間平均，即對任一物理量 $Q(t)$ ，其平均值

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt Q(t)$$