

2021年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2020年4月7日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的“正面”答案卷上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2021 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、WKB 近似

WKB 近似法是一個半古典的近似法，我們可以用這個近似法來估計量子束縛態的能階。首先我們利用古典的力學能守恆式將動量 p 表示為力學能 E 與位置 x 的函數，由於在古典力學中一維束縛態的粒子會作週期運動，因此我們可利用下列量子化條件： $\oint p(x)dx = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right) 2\pi\hbar$ ，來求得量子態的能階公式，這裡 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 是縮減普朗克常數， κ 是大於等於 0 的整數。

- (a) 考慮簡諧振子，即位能 $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 力學系統，這裡 ω 是簡諧振子的角頻率，而 m 是粒子的質量。利用前述量子化條件，求簡諧振子的能階公式。
- (b) 我們也可以用一樣的方法來求得類氫原子的量子能階公式。由於類氫原子是三維的系統，我們除了考慮電子徑向運動的動能項 $\frac{p_r^2}{2m}$ 外，還要考慮電子繞原子核的轉動動能。假設電子的位能 $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ ，這裡 Ze 是原子核所帶的電荷；電子的軌道角動量 $L = \left(l + \frac{1}{2}\right)\hbar$ ，這裡 l 是大於等於 0 的整數；原子核的質量遠大於電子的質量 m ，故其運動可忽略。寫出電子的力學能守恆式。利用前述量子化條件，求類氫原子的量子能階公式。
- (c) 承(b)小題，考慮相對論效應，但忽略電子的自旋，這時電子的力學能守恆式應修正為 $(E - V)^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ ，這裡的 p^2 是電子的總動量量值的平方，同時包含電子的徑向運動及其繞原子核的轉動。再次利用前述量子化條件，求類氫原子的相對論性量子能階公式。
- (d) 由(c)小題的結果可以知道當 Z 大於一極限值 Z_c 時，類氫原子的相對論性基態能量變成複數，求 Z_c 。這時“真空”變得不穩定[註 1]。

在(e)小題中，我們將利用 WKB 近似法來估計量子穿隧效應發生的機率。首先我們一樣利用古典的力學能守恆式將動量 p 表示為力學能 E 與位置 x 的函數， p 只有純虛數解的區域稱為古典禁區，若此禁區的範圍是 $x_1 < x < x_2$ ，則量子穿隧效應發生的機率為 $\exp\left\{(2/\hbar) \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-p^2} dx\right\}$ 。

- (e) 在一維均勻電場的系統中 $V(x) = e\varepsilon_0x$ ，若考慮相對論效應，則電子的力學能守恆式為 $(E - V)^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ ，從這個能量與動量關係可以看出，粒子的動量 p 在某些區域中會變成純虛數。用 WKB 近似法估計電子穿隧的機率，以 ε_0, m 及基本物理常數表示[註 2]。

可能用到的積分公式:

$$\text{若 } x_2 > x_1, \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(x_2 - x)(x - x_1)} dx = \frac{1}{8} \pi (x_2 - x_1)^2。$$

$$\text{若 } x_2 > x_1 > 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(x_2 - x)(x - x_1)}}{x} dx = \frac{\pi}{2} (x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2})。$$

[註 1] 這個現象出現的原因是當原子核在距離原點 $\hbar/(mc)$ 處的電位大於某個臨界值時，其電位差可以從”真空”中產生正、負電子對，因此”真空”變成不穩定。如果我們可以大幅降低系統的”光速”，則可大幅將低 Z_c ，事實上這個現象已經在石墨烯這個系統中被觀測到。

[註 2] 只要距離夠長，均勻電場總是可以產生足夠的電位差，可以從”真空”中產生正、負電子對，這時”真空”也是變成不穩定。

二、相對論干涉儀

單一波長 λ_s 的點光源 O' ，相對於 (x, y, z) 座標原點 O ，以 v 的速度沿著 $+x$ 的方向移動，如下圖 1 所示。

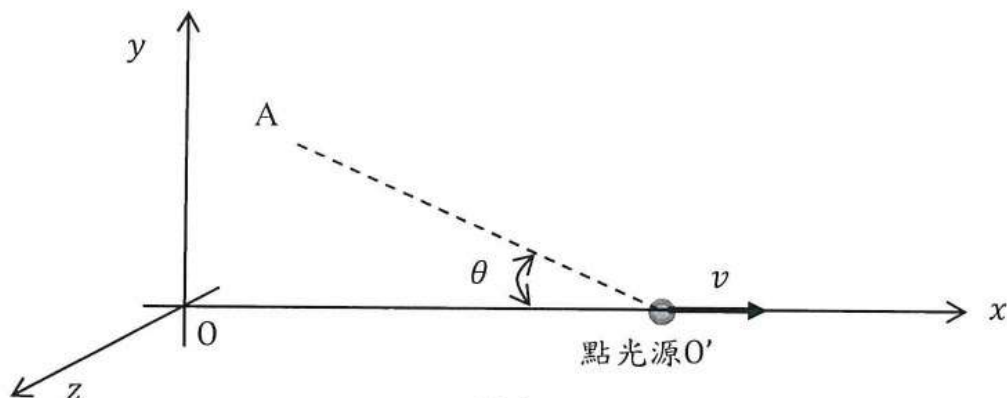


圖 1

- (a) 設光速為 c ，在某時刻，靜止在 (x, y) 平面座標上的觀察者 A ，其 A 、 O' 連線和 x 軸的夾角恰為 θ ；則觀察者 A 所測得的波長 λ_A 為何？並求出點光源 O' 的週期 $T_s (= \lambda_s/c)$ 與 λ_A 的關係式。
- (b) 考慮下圖 2 中的麥克生-莫立實驗，其放置在 $x-y$ 平面上，以 v 的速度沿著 $+x$ 的方向移動；其中 H 為半穿透半反射鏡，因此 50%雷射光經 H 反射到反射鏡 I 後再折返至觀察者，如圖中的實線，另外 50%雷射光透過 H 到反射鏡 II 後再折返至觀察者，如圖中的虛線。已知 H 至反射鏡 I 的距離為 L ，而 H 至反射鏡 II 的距離也為 L ，且 H 很薄所以光折射等效應可以忽略。計算 H 到 I 來回的時間 $t_{\perp}$ ，以及計算 H 到反射鏡 II 的來回時間 $t_{\parallel}$ ，求得經過 H 的兩束光到達觀察者的時間差。

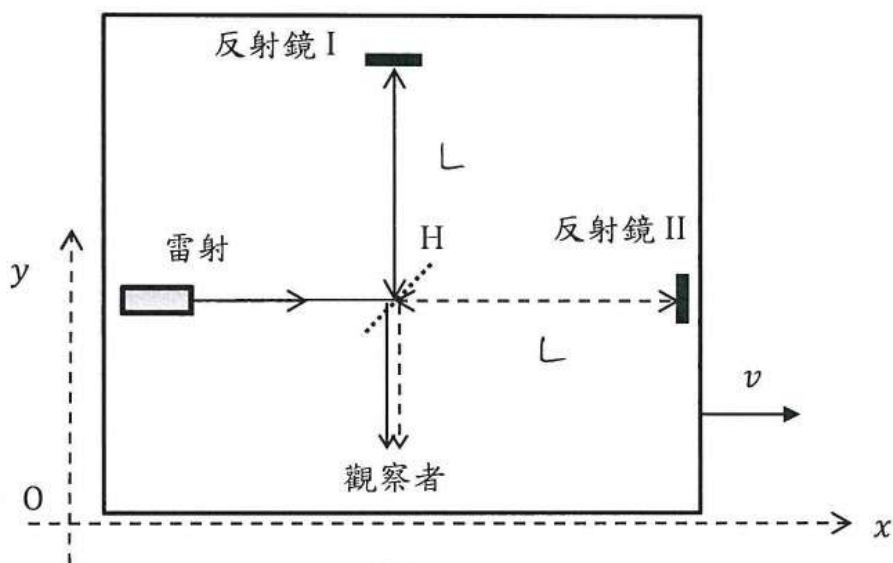


圖 2

三、電流與磁場的分布

在準靜電近似的假設下，電場與磁場的時變率均極微小，而可被忽略，因此就電流與磁場分布而言，載流長直螺線管線圈可以近似為電流沿圓形路徑環繞其中心軸流動的空心圓柱形導體，如圖 3 與圖 4 所示。已知空心圓柱形導體的內、外半徑分別為 a 、 b ，縱向總長度為 L ，且 $L \gg a, b$ ，導體的電阻率為 ρ_e ；當以 r 、 θ 、 z 代表圓柱座標時，在導體內部穩定流過任一個位於 rz 平面、邊長為 L 與 $(b-a)$ 之矩形截面的電流為 I ，亦即在半徑 a 、 b 之間每單位軸長通過的電流為 $i = I/L$ 。注意：導體內的電流密度 $\vec{J} = J_\theta(r)\hat{\theta}$ 與 r 有關，不一定均勻。

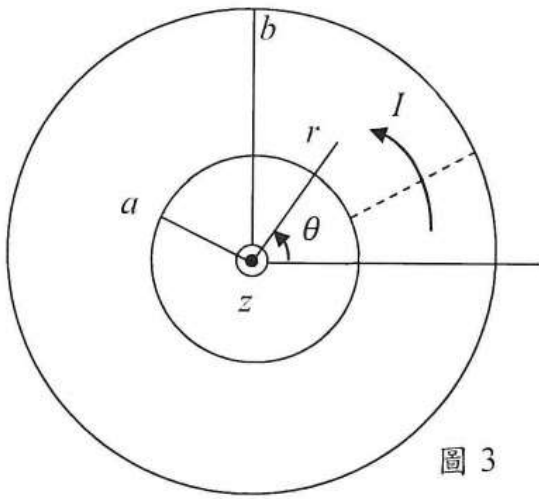


圖 3

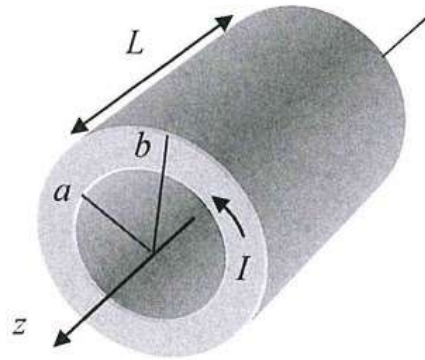


圖 4

- 求導體內各點的電場 $E_\theta(r)$ 與電流密度 $J_\theta(r)$ 。
- 求導體內、外各點的磁場 $\vec{B}$ 。
- 當 $a \approx b$ 時，試求每單位 z 軸長度上，在 $(\theta, \theta + d\theta)$ 範圍內沿徑向往外施加於電流(與導體)之磁力 dN 。
- 當 $a \approx b$ 時，試求導體表面每單位面積受到之沿徑向往外之磁力 P_r 。
- 當 $a \approx b$ 時，試求導體每單位 z 軸長度上受到之切向($\hat{\theta}$)張力 T 。

註：當 $x \approx 1 + \epsilon$ ($|\epsilon| \ll 1$) 時， $\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 \rightarrow \frac{\ln x}{x-1} = 1 - \frac{x-1}{2}$ ；

$$\int_0^r \ln x \, dx = r \ln r - r, \quad r > 0$$

四、U 形管非對稱轉動的遲滯曲線

如右圖 5 所示，有一內裝密度為 ρ 之液體、截面積為 A 之 U 形管，在靜止平衡時，左右兩側管的液面等高且高度為 h ，假設左右兩側管相距 D ，且 A 甚小於 h 、 D 以及其他沿 U 形管的長度(如 a)，使得計算這些長度時，可忽略 A 。今將整個 U 形管對一與左側管相距 a 之鉛垂軸以逆時針、角速度 ω 轉動，試回答以下問題：

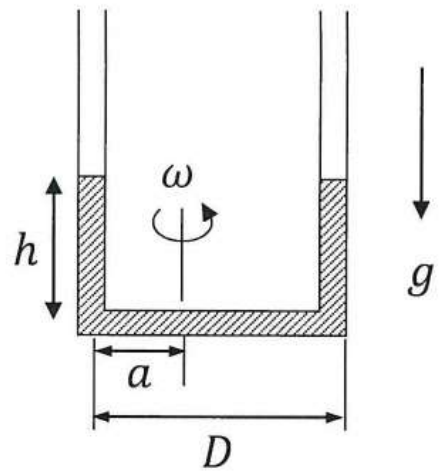


圖 5

- (a) 當 U 形管中液面達到平衡時，左右管的液面高度不同，若考慮右管高度較高的情形，則依角速度 ω 量值的大小不同，可能有左管仍有液體的情況(情況 1，如圖 6)與左管液體清空(情況 2，如圖 7)兩種情形，試求出此兩種情況發生時， ω^2 與 z 的關係。

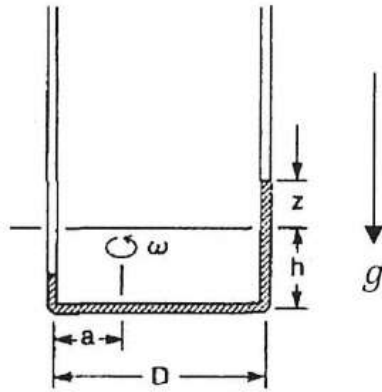


圖 6

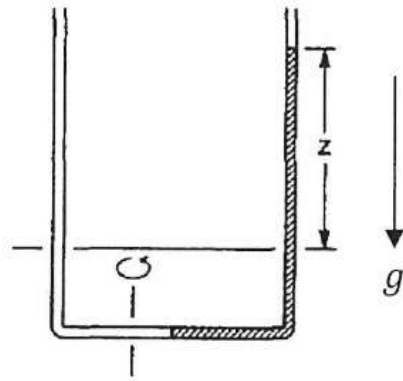


圖 7

- (b) 給定一個角速度 ω ，U 形管達平衡時只會有一個平衡液體高度 z 。欲決定(a)小題中情況 1 與情況 2 哪一個是給定角速度 ω 時的平衡液體高度，我們忽略黏滯力，考慮在 U 形管靜止的座標系中液體的總位能 U ，即給定一個角速度 ω ，總位能的最小值決定平衡液體高度 z 。設 $\frac{g}{D} = \omega_0^2$ ，角速度 ω 以 ω_0 為單位，長度以 D 為單位，即 $\omega \rightarrow \bar{\omega} \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$ 、 $h \rightarrow$

$\bar{h} \equiv \frac{h}{D}$ 、 $a \rightarrow \bar{a} \equiv \frac{a}{D}$ 以及 $z \rightarrow \bar{z} \equiv \frac{z}{D}$ ，試計算情況 1 與情況 2 兩種情形，液體的總位能

$u \equiv \frac{U}{\rho A g D^2}$ (以 $\rho A g D^2$ 為單位)與液面高度 $\bar{z}$ 之關係(以沒單位的參數 $\bar{\omega}$ 、 $\bar{h}$ 、 $\bar{a}$ 表示)。

- (c) 已知當 $\frac{2a(D+2h)}{D^2} > 1$ ，此系統可展現遲滯行為，以下設 $\frac{h}{D} = 0.5$ ， $\frac{2a}{D} = 0.9$ ，滿足 $\frac{2a(D+2h)}{D^2} =$

$1.8 > 1$ 。此時，角速度 $\bar{\omega}$ 由 0 開始緩慢增加，液面高度也由 0 開始，增加當達到 $\bar{\omega}_{max}$ ，液面高度為 $\bar{z}_1$ ，任何微小的擾動會造成液面高度不連續跳躍到 $\bar{z}_2$ ，之後再隨角速度增加而在跳躍後之曲線上繼續連續的增加，此時如果將角速度緩慢減小，達到 $\bar{\omega}_{max}$ 時，液面高度不會跳躍回到 $\bar{z}_1$ ，而是繼續減小當角速度達 $\bar{\omega}_{min}$ 時，液面高度為 $\bar{z}_3$ ，此時任何微小的擾動會造成液面高度不連續跳躍到 $\bar{z}_4$ ，之後再隨角速度減小而在跳躍後之曲

線上繼續連續的減小，如此所描繪的曲線為遲滯曲線。利用(b)小題，求出 $\bar{\omega}_{max}^2$ 、 $\bar{\omega}_{min}^2$ 、 $\bar{z}_1$ 、 $\bar{z}_2$ 、 $\bar{z}_3$ 以及 $\bar{z}_4$ ，並在 $\bar{z}$ 對 $\bar{\omega}^2$ 的作圖中，大致畫出遲滯曲線，並標示出 $\bar{z}_1$ 、 $\bar{z}_2$ 、 $\bar{z}_3$ 、 $\bar{z}_4$ 、 $\bar{\omega}_{min}^2$ 與 $\bar{\omega}_{max}^2$ 。

五、順磁性物質的磁化率和居禮定率

順磁性物質的分子帶有微小的磁矩(可以想像成微小的磁鐵)，這些磁矩彼此之間的磁交互作用極弱，所以在沒有外加磁場時，磁矩的方向為隨機分布，總磁矩為零。在絕對溫度 T 時，因為外加磁場 $\vec{H}$ 的作用，這些微小磁矩則會朝向磁場的方向排列，而有不為零的總磁矩 $\vec{\mu}$ 。

實驗上發現物質的磁化強度 $\vec{M} = \frac{\vec{\mu}}{V}$ (每單位體積的磁矩) 和外加磁場 $\vec{H}$ 成正比，即 $\vec{M} = \chi \vec{H}$ ， χ 是物質的磁化率。因為分子磁矩之間的磁交互作用極弱，物質分子所感受到的磁場 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} \approx \mu_0\vec{H}$ ， μ_0 是真空磁導率。法國物理學家皮耶·居禮實驗發現順磁性材料的磁化率則是和其絕對溫度 T 成反比 $\chi = \frac{C}{T}$ ，故此關係式稱為居禮定率，比例常數 C 稱為居禮常數。

(a)如圖 8 所示，當外加磁場作用時，順磁性物質的一個分子磁矩 $\vec{\mu}$ 和外加磁場的夾角為 θ 。若順磁性物質的所有分子磁矩中，指向夾角 θ 的比例(機率) p 是角度 θ 和 $\theta + d\theta$ 之間的(球)表面積和對應總表面積的比值 s 與波茲曼因子 $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ 的乘積，其中 E 是單一分子磁矩在磁場中的能量， $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ ， k_B 是波茲曼常數。請推導出 p 的數學式(以 μ 、 B 、 k_B 、 T 、 θ 表示)。

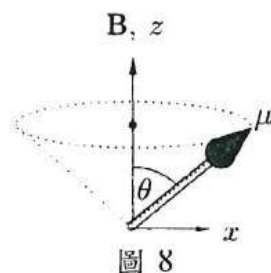


圖 8

(b)令外加磁場的方向為 z 方向，且此順磁性物質每單位體積有 n 個分子，請求出此順磁性物質沿 z 方向的磁化強度 M_z 。

(c)承(2)，在 $\frac{\mu B}{k_B T}$ 很小的條件之下，求出此順磁性物質的磁化率 χ 和居禮常數 C 。

[註] (i) $\frac{\int_{-1}^1 x e^{yx} dx}{\int_{-1}^1 e^{yx} dx} = \coth y - \frac{1}{y}$, (ii) y 很小時， $\coth y \approx \frac{1}{y} + \frac{y}{3}$ 。