

2021年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2021年4月6日 08:10-13:10

- 一、 本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。
- 二、 考試時間五小時。
- 三、 限以藍色或黑色原子筆作答。
- 四、 在指定的“正面”答案卷上作答。
- 五、 可使用無程式掌上型計算機。
- 六、 在每題開始時換用新頁。
- 七、 在每一頁答案卷的右上頂端寫明：
 - 參賽編號
 - 題號
 - 該題所用答案卷之頁碼／該題所用答案卷的總頁數例(以第一題用了三頁紙為例)： $1/3$ ； $2/3$ ； $3/3$

2021 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。

一、法拉第磁光效應

已知在均勻介質中的電磁場滿足下列馬克士威(Maxwell)方程式：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \text{ (高斯律)}, \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ (法拉第律)}, \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \text{ (安培律)}。其中$$

位置向量 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ 為向量場 $\vec{A}$ 的散度, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$ 則為向量場 $\vec{A}$ 的旋度。且 $D_j = \sum_{k=x,y,z} \epsilon_{jk} E_k$,

$B_j = \sum_{k=x,y,z} \mu_{jk} H_k$, $j = x, y, z$, ϵ_{jk} 、 μ_{jk} 分別是材料的電容率及磁導率張量。考慮平

面波解： $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$, $\vec{D}(\vec{r}, t) =$

$\text{Re} \left\{ \vec{D}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\}$, ω 是電磁波的角頻率，是一個常數(與

$\vec{r}, t$ 無關)。 $\vec{k}$ 是電磁波的波數向量，是一個常數向量，它的方向即是電磁波的行進方向，

$\omega, \vec{k}$ 均為實數。 $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{D}_0, \vec{H}_0$ 是常數向量，但可以是複數。若 $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ，由

指數函數的性質可知：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = i(\vec{k} \cdot \vec{A}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \vec{\nabla} \times \vec{A} = i(\vec{k} \times \vec{A}_0) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}。$$

(a)證明由馬克士威(Maxwell)方程式可得： $\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0$, $\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$, $\vec{k} \times \vec{E}_0 - \omega \vec{B}_0 = 0$ 及

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 + \omega \vec{D}_0 = 0。$$

(b)承(a)小題，考慮各向同性的介質，即 $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon$, $\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{zz} = \mu$ ，而

其它 ϵ_{jk} 、 μ_{jk} 分量皆為零。求 $k \equiv |\vec{k}|$ 與 ω 所滿足的關係(稱為色散關係)，並證明電磁波是橫波。

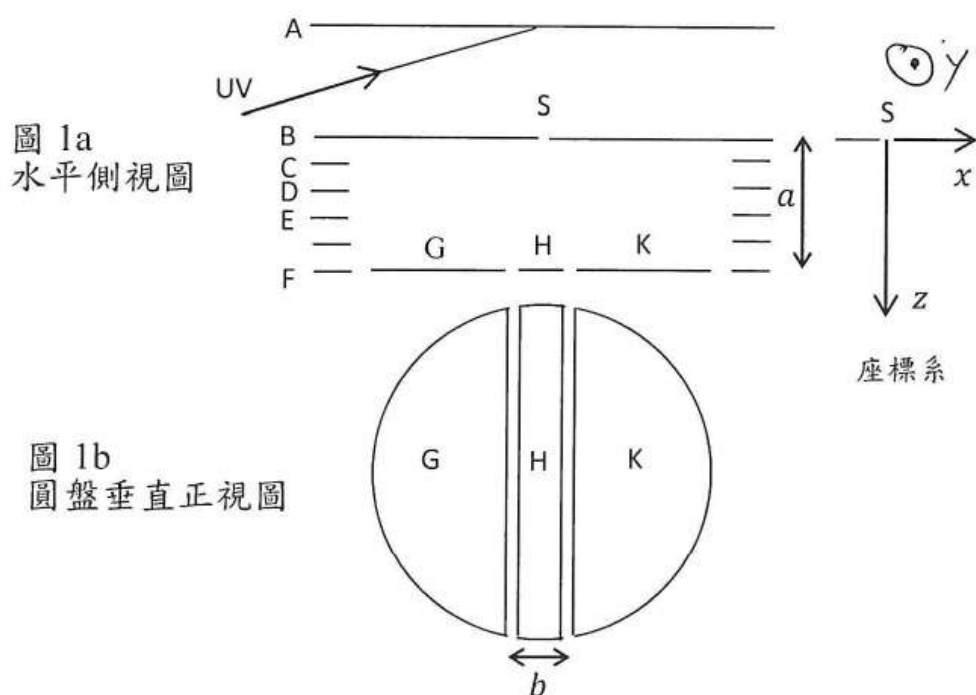
(c)承(a)、(b)小題，因介質為各向同性，我們可以將電磁波的行進方向選為 $\hat{z}$ ，即 $\vec{k} =$

$k\hat{z}$ 。利用電磁波是橫波的性質，我們知道 $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$, $\vec{B}_0 = B_{0x}\hat{x} + B_{0y}\hat{y}$ 。將 B_{0x}, B_{0y} 以 $E_{0x}, E_{0y}, \omega, \mu, \epsilon$ 表示。

- (d) 當 E_{0x}, E_{0y} 皆為實數(相位相同)時, 我們將這樣的電磁波偏振性質稱為線偏振, 而電磁波的偏振方向就是 $\vec{E}_0$ 。若 $E_{0x} = E_0, E_{0y} = 0$, 且 E_0 為實數, 求 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 及 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 。
- (e) E_{0x} 是實數, 而 E_{0y} 為純虛數(相位差 90° 相同)時, 我們將這樣的電磁波偏振性質稱為橢圓偏振。若 $E_{0x} = E_0, E_{0y} = iE_0$, 此時電磁波的偏振性質為左旋圓偏振(簡稱為左旋), 求 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 及 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 。若 $E_{0x} = E_0, E_{0y} = -iE_0$, 此時電磁波的偏振性質為右旋圓偏振(簡稱為右旋), 求 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 及 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 。
- (f) ϵ_{jk} 仍維持各向同性, 且 $\epsilon = \epsilon_0$, 但 $\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_1, \mu_{xy} = -i\mu_2, \mu_{yx} = i\mu_2, \mu_{zz} = \mu_3$, 而其它 μ_{jk} 分量皆為零。當電磁波沿 $\hat{z}$ 方向行進, 分別求此時左旋及右旋電磁波的 k 與 ω 所滿足的色散關係(與係數 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \epsilon$ 有關)。
- (g) 承(f)小題, 考慮左旋電磁波: $E_{0x} = E_0, E_{0y} = iE_0$, 求 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 及 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 。接著考慮右旋電磁波 $E_{0x} = E_0, E_{0y} = -iE_0$, 求 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 及 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ 。
- (h) 承(f)、(g)小題, 若在介質內有一沿 $\hat{z}$ 方向行進、角頻率為 ω 的平面電磁波, 此電磁波同時包含左旋及右旋電磁波的分量。已知在 $z = 0$ 處, 左旋與右旋分量恰好同相, 若欲使此二分量在 $z = d_0$ 剛好反相, 則 d_0 要滿足什麼條件?
- (i) 承(f)、(g)小題, 若在 $z < 0$ 處為真空, 而 $z \geq 0$ 處則為上述介質。考慮一沿 $\hat{z}$ 方向行進的左旋平面電磁波垂直射向此二介質的介面。問其透射波與反射波的偏振分別為何?
- (j) 承(f)、(g)、(i)小題, 由馬克士威方程式可知, 平行界面方向的 $\vec{E}$ 及 $\vec{H}$ 為連續。當入射電磁波的偏振是左旋時, 求此電磁波在上述界面的透射波與入射波電場的比值 t_L 與反射波與入射波電場的比值 r_L 。

二、Townsend 實驗

英國物理學家 J. S. Townsend 等早期用以研究電子在氣體中之擴散運動的實驗裝置，如下圖 1a 所示。在絕對溫度固定為 T 、且壓力 p 可調控的氣體室(未繪出)中，紫外線(UV)射向金屬板 A 使電子跳出，電子全程受到 BCDEF 等環形電極板所提供之均勻靜電場($-E\hat{z}$)的作用，在氣體中擴散，通過 B 板中央的狹縫 S(垂直紙面，沿 y 軸延伸)，等速漂移往分隔成三區的圓盤 G-H-K 前進(圖 1b)。B 到 G-H-K 的距離為 a ，而 G、H 與 K 可以分別絕緣或連接。H 區兩側狹縫的中分線與 y 軸平行，相距為 b (圖 1b)。由驗電器可測得抵達 G、H、K 的電子數，分別以 n_1 、 n_2 、 n_3 代表，從而可求得比值 $R \equiv n_2/(n_1 + n_2 + n_3)$ 。



以狹縫 S 為 xyz 座標系原點，取座標軸方向如圖 1a 右方所示。令單個電子的質量為 m ，所帶負電荷為 $-e$ ，並以 $n(x, y, z)$ 代表電子數密度，以 v_x, v_y, v_z 分別代表電子擴散運動之平均速度 $\vec{v}$ 沿 x, y, z 方向的分量。已知電子在氣體中的擴散係數為 K ，其定義如下：

$$nv_x = -K \frac{\partial n}{\partial x}, \quad nv_y = -K \frac{\partial n}{\partial y}, \quad nv_z = -K \frac{\partial n}{\partial z} \quad (1)$$

忽略電子之間的靜電排斥力，並假設電子與氣體分子均滿足理想氣體方程式。已知在穩定態時，電子(視為氣體)的絕對溫度 T' 較高，而為氣體分子絕對溫度 T 的 β 倍，即 $T' = \beta T$ 。因此，電子的狀態方程式為分壓 $P = nk(\beta T)$ ， k 為波茲曼常數。

在本問題中，假設圓盤 G-H-K 所測得之電子數 n_1 、 n_2 、 n_3 的比例，主要是由 x 方向的擴散決定，因此可以忽略分壓 P 隨 y 、 z 的變化。

圖 1 的裝置可以用來測定在外加電場下，電子在氣體中運動時的 β (或熱擾動的平均速率 V) 及漂移速率 (W)，以下分成 A、B、C 三部分來探討相關問題。

A 部分--測定 β

- (a)考慮電子在氣體中的擴散運動。當電子數密度 $n(x, y, z)$ 的分布達到穩定態時， $n\vec{v}$ 須滿足的微分方程式為何？
- (b)通過 S 的電子在 B 到 GHK 之間的靜電場 $(-E\hat{z})$ 作用下擴散，當達到穩定態時，沿各座標軸方向，電子在氣體室中各點的分壓 P 隨位置座標 (x, y, z) 的變化率，必須滿足的微分方程式為何？
- (c)依題本的假設，分壓 P 隨 y 、 z 的變化可忽略。在此近似下，可得到如下的簡化方程式：

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial n}{\partial z} \quad (2)$$

試以題目所給相關物理參數表示 σ 。

- (d)已知依據圖 1a 所示的實驗設計，(2)式的解可表示為

$$n = \frac{A}{\sqrt{z}} e^{-\frac{\sigma x^2}{4z}} \quad (3)$$

其中 A 與 σ 為常數。

試求比值 $R \equiv n_2/(n_1 + n_2 + n_3)$ 的表示式(可使用定積分表示)。

R 只與一些特定物理參數的比值有關，試給出該比值的表示式。

B 部分--測定漂移速率 W

圖 1a 實驗裝置中的氣體室，由 B 到 GHK 的部分，可以置於一個沿 y 軸、磁場強度可調的均勻靜磁場 $B_0\hat{y}$ 中，從而可量出漂移速率 W 。

- (e)若在電場 $(-E\hat{z})$ 與磁場 $(B_0\hat{y})$ 的作用下，由圓盤 GHK 量到的電子數 $n_3 = n_1 + n_2$ ，則電子沿 z 方向的漂移速率 W 為何？

C 部分--平均自由徑 λ

在無外加磁場時，如 A 部分已指出的，電子在電場 $(-E\hat{z})$ 作用下擴散，達到穩定態時，其熱擾動速率 V 所對應的溫度為氣體分子溫度 T 的 β 倍。相較之下，電子沿電場反方向的漂移速率 W ，則慢了許多。

- (f)假設電子每次在與氣體分子碰撞後，其速度方向的機率分布具有均向性，因此每次碰撞後的速度平均為零。試求電子在氣體中的平均自由徑 λ 。
- (g)試求達到穩定態時，電子每次在與氣體分子碰撞時，平均之動能損失與入射平均動能之比值 δ 。

三、介電質板在平行板電容器中的受力及運動

面積為 w^2 的正方形平行板電容器，兩平行金屬板之間的距離為 d ($d \ll w$)，其中間的空間有一部分被面積同為 w^2 厚度為 d 的介電質板以插入的方式所填入。介電質 (dielectric) 板的介電常數為 κ ，兩平行金屬板之間的電位差以乾電池固定為 V ，如圖 2 所示。

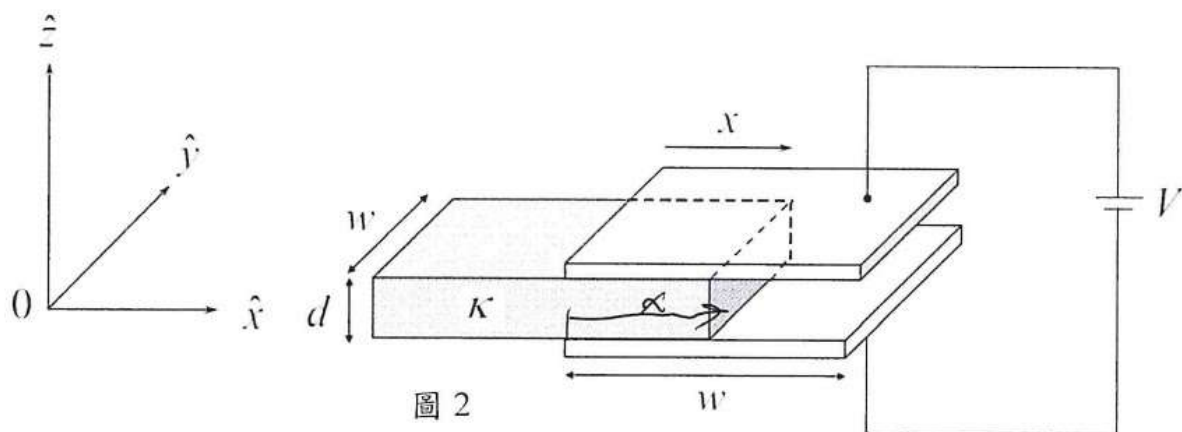


圖 2

圖中介電質板進入平行金屬板電容器範圍的距離為 x ，本題所考慮的情況為 $x \gg d$ 與 $w - x \gg d$ ，並忽略物理量沿座標 y 的變化。真空電容率 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m。

A. 介電質中電極化強度 $\vec{P}$ 與電場 $\vec{E}$ 的關係：

此處先考慮介電質板重完全填滿平行板電容器 (即 $x = w$) 的情形。

- 求上面那一塊金屬板 (在 $z = d/2$ 處) 的面電荷密度 σ_+ 。所考慮面電荷的範圍在金屬板正方形中心附近。求在介電質板上 ($z = d/2$ 處) 的感應面電荷密度 σ_{ind} ；以介電質板中的總電場 $\vec{E} = E_z \hat{z}$ 及其他物理常數表示之。
- 求介電質板中電極化強度 $\vec{P}$ 與總電場 $\vec{E}$ 在一般情形下的關係。電極化強度 $\vec{P}$ 為介電質因外部電場而產生的電偶極密度。

B. 介電質板在平行板電容器中的受力： 能量計算

此處 x 恢復為上圖中的情形。今以一外力 F_x^0 作用在電介質板上使之位移 Δx ，在無摩擦力的情形下，

- 寫出這位移的能量平衡等式，列出各作功與位能改變的項。
- 求平行板電容器作用在電介質板的力 F_x 。

C. 介電質板在平行板電容器中的受力： 力的計算

- 考慮介電質中一電偶極在不均勻電場 $\vec{E}$ 下的受力 $\vec{F}'$ ；電偶極的 $-q$ 在 $\vec{x}$ 而 $+q$ 在 $\vec{x} + \vec{a}$ ($|\vec{a}|$ 為極短距離)。試推導出 $\vec{F}'$ 的表達式為 $\vec{F}' = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$ ，並求出 $\vec{A}$ 。此處 $\vec{\nabla} = \hat{x} \partial / \partial x + \hat{y} \partial / \partial y + \hat{z} \partial / \partial z$ 。
- 試描繪出介電質板中在 $x-z$ 平面上電場的電力線圖，並指出 E_x 與 E_z 在 z 座標上的對稱性。
- 寫出平行板電容器作用在介電質板的力 $\vec{F}$ 的體積分表達式，式中只以電場 $\vec{E}$ 及物

理常數表示之。

(h) 試推導出 $\vec{F}$ 的表達形式為 $\vec{F} = \hat{x} C_0 \int_{V_D} d^3r \frac{\partial}{\partial x} (E^2)$, V_D 是介電質板的體積，並求出係數 C_0 。

在上小題(g)裡 $\vec{F}$ 表達式中對 z 的積分，引進電場對稱性的考量，可簡化 $\vec{F}$ 的推導。若接著在 $x-z$ 平面上以點 (x, z) 定義一個小方塊面積(面積為 $dx dz$)，並套用法拉第定律 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$ ，則能推導出 $\vec{F}$ 的表達形式。

(i) 求 $\vec{F}$ 的表達式。

(j) 若介電質板為奈米級厚度的氮化硼板， $d = 1 \text{ nm}$ ， $w = 1 \text{ }\mu\text{m}$ ， $\kappa = 4.2$ ， $V = 5 \times 10^{-2} \text{ V}$ ，求 F_x 的值。

D. 介電質板在兩平行板電容器中的運動：

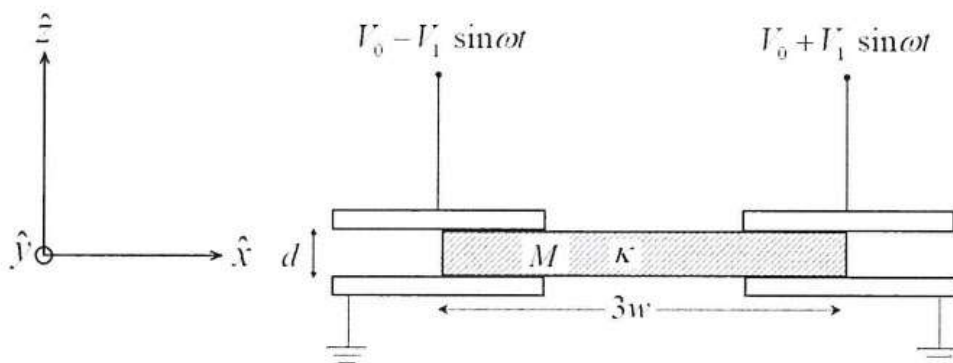


圖 3 兩平行板電容器側視圖

附圖為兩個平行板電容器與一個介電質板的系統，平行板電容器的大小與(j)小題的一樣，介電質板是奈米級厚度的氮化硼板，其大小除了長度改為 $3w$ 外，其餘的邊長都與(j)小題的相同。另外 $V_0 = V_1$ 與(j)小題的 V 相同。

(k) 已知氮化硼的質量密度為 $2.1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ，若忽略摩擦力的影響，並要將氮化硼板的振動振幅調整至 1 nm ，則交流偏壓角頻率 ω 的值應為多少？