

2022年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2022年4月2日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙正面上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2022 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試

決選研習營筆試(一)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、盪鞦韆問題

某小女生在公園內盪鞦韆，她不想有人推她，而想以改變自己的姿勢方式愈盪愈高。現在假設小女生為一質點，質量 m ，鞦韆質量可忽略不計，小女生改變姿勢時改變其重心位置，其效果可視為改變鞦韆等效長度。考慮重心位置改變方式如圖 1 的右圖所示意；鞦韆初始角度為 θ_0 ，長度為 $L + \Delta L$ ，當到最低點 A 時，小女生迅速沿盪鞦韆方向移動重心位置移於 B，等效長度變為 L ；接下來鞦韆盪到另一端最高點 θ'_0 時，再迅速沿盪鞦韆方向移動重心，此時重心位置再改為初始位置，長度變為 $L + \Delta L$ ，此後重複此方式；注意圖 1 僅為示意圖， ΔL 可以為正值或負值。過程中盪鞦韆不彎曲，且不考慮摩擦力，試回答以下問題：

(a) 求 $\cos(\theta_0) - \cos(\theta'_0)$ ，以 $\cos(\theta_0)$ ， L ， ΔL ， m 表示。

(b) 由(a)結果討論在何種情況下，小女生能愈盪愈高。

(c) 考慮完成 n 次來回振盪，耗時 $t (= \tau n)$ 秒後，小女生的能量為 $E(t) = E_0(1 + \varepsilon)^{\beta t}$

其中 $E_0 = mgL(1 - \cos(\theta_0))$ ， $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ，求參數 ε 與 β 。

(d) $m = 30\text{kg}$ ， $L = 3\text{m}$ ， $|\Delta L| = 40\text{cm}$ ，考慮在以下兩種初始條的 E_0 下，耗時 t 秒後 $E(t) = 150\text{J}$ ，求所需時間 t 。

(1) $\theta_0 = 10^\circ$ 。

(2) 假設 $\theta_0 = 0^\circ$ ，小女生感受熱擾動能量 $E_0 = 1/2 k_B T$ ，其中 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 為波茲曼常數， $T = 300 \text{ K}$ 。

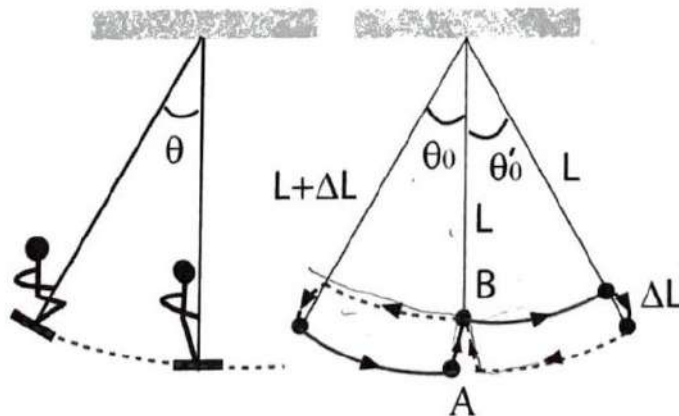


圖 1

二、氦原子

1935 年，物理學家湯川秀樹提出「強作用力」理論，指出原子裡的質子與中子是由下列位能 $U(r)$ 所束縛在一起：

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

其中 $\lambda = \hbar/m_\pi c$ ， $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ， $h = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{sec}$ 為普朗克常數，而 m_π 是介子質量 $138 \text{ MeV}/c^2$ ， r 是核子間的距離。 g^2 是核力常數，也是我們此題想求出的數值。為簡化問題，考慮一質子與一中子（構成氦原子），且假設質子質量與中子質量相等： $m_p = m_n = m = 938 \text{ MeV}/c^2$ （其中下標 p 與 n 分別指代質子與中子，見下圖 2）。它們在 $U(r)$ 下繞質心進行圓周運動，已知其基態能量為 -2.22 MeV 。

此雙粒子系統（氦）可被簡化成單一約化質量 $\mu = m_p/2$ ，且具有速率 $v = |\vec{v}_p - \vec{v}_n|$ ，其中 $|\vec{v}_p| = |\vec{v}_n|$ 。假設其總角動量滿足波耳量子化公式。

以下數值計算中，能量單位請採用 MeV ($1 \text{ MeV} = 1.60 \times 10^{-13} \text{ J}$)，長度請採用 fm ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$)，質量請採用 MeV/c^2 ，以此類推。

- (a) 請寫出 μ 所受的向心力，以 r 、 g^2 和 λ 表示。
- (b) 根據總角動量量子化，求出氦原子的第 n 個能階 E_n ，以約化質量之圓軌道半徑 r_n 、 g^2 和相關參數表示。
- (c) 考慮氦的基態 ($n=1$)。定義 $x_1 \equiv r_1/\lambda$ 。試以 x_1 表示 E_1 ，此關係式包含 $\hbar$ 、 μ 與 λ 。並由此用數值方法估算出 x_1 數值（取到兩位有效數字），進而求出 r_1 。
- (d) 請估算出 g^2 值。

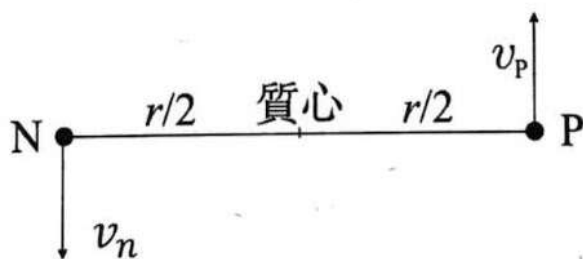


圖 2

三、卡諾循環

在卡諾循環的兩個等溫過程中，工作物質與所接觸的高溫熱庫及低溫熱庫的溫度差分別都是零。然而兩接觸物體間的熱通量一般是與兩者的溫度差成正比（歸納為傅立葉熱傳導定律），導致卡諾循環中系統的熱進出率也是零。因此效率最高的卡諾熱機沒有功率輸出。

為了讓卡諾熱機有實際的功率輸出，可以讓高溫等溫過程中工作物質的溫度 $T_{Hs} < T_H$ (T_H 為高溫熱庫的溫度)，低溫等溫過程中工作物質的溫度 $T_{Cs} > T_C$ (T_C 為低溫熱庫的溫度)。假設這兩個等溫過程執行的時間都是 Δt ，過程中的熱流分別為 $|Q_H| = K(T_H - T_{Hs})\Delta t$ 與 $|Q_C| = K(T_{Cs} - T_C)\Delta t$ ，兩個步驟的正比常數都是 K 。

- (a) 要讓熱機能持續運作，在執行一個循環後，工作物質必須回到啟始的狀態。也就是說，一個循環後，工作物質的熵變化淨值為零。依此要求，請將 T_{Cs} 以 T_H 、 T_C 與 T_{Hs} 來表達。
- (b) 假設卡諾循環中另外兩個絕熱過程執行得很迅速，所花的時間與 Δt 相比可忽略。那麼要讓熱機有最大的功率輸出，如何選擇 T_{Hs} 與 T_{Cs} ？（以 T_H 與 T_C 來表達）
- (c) 在最大的功率输出的情形下，此熱機的功率 P 與效率 $e = (|Q_H| - |Q_C|)/|Q_H|$ 分別為何？（以 Δt 、 K 、 T_H 與 T_C 等來表達，請化簡到分母裡不包含任何根號項）

四、超穎材料

超穎材料指的是電容率 ϵ 及磁導率 μ 均為負值的材料。由於介質的折射率 $n = \sqrt{\mu/\mu_0} \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ ，超穎材料的折射率亦為負值，這種材料可以用來做成理想透鏡。

(a) 如圖 3 所示，考慮光線由電容率及磁導率分別為 ϵ_1 、 μ_1 的一般材料(介質 1，折射率 n_1)，經過一片厚度為 d_0 、電容率及磁導率分別為 ϵ_2 、 μ_2 的超穎材料(介質 2，折射率 n_2)，最後再進入介質 1，並在 B 點處經過 x 軸。求 B 點的 x 座標 x_B 。這裡司乃耳定律為 $n_1 \sin \theta_1 = -n_2 \sin \theta_2$ 。

(b) 若 $d_0 > x_0$ ，則這片超穎材料的電容率 ϵ_2 、磁導率 μ_2 需滿足什麼條件，才能成為理想的會聚透鏡(所有經過 A 點的光線都將會聚到 B 點)?

(c) 承(a)小題，若這片超穎材料的電容率 ϵ_2 、磁導率 μ_2 滿足(a)小題的理想會聚透鏡條件，但 $d_0 < x_0$ ，則這片超穎材料會有什麼光學功能?

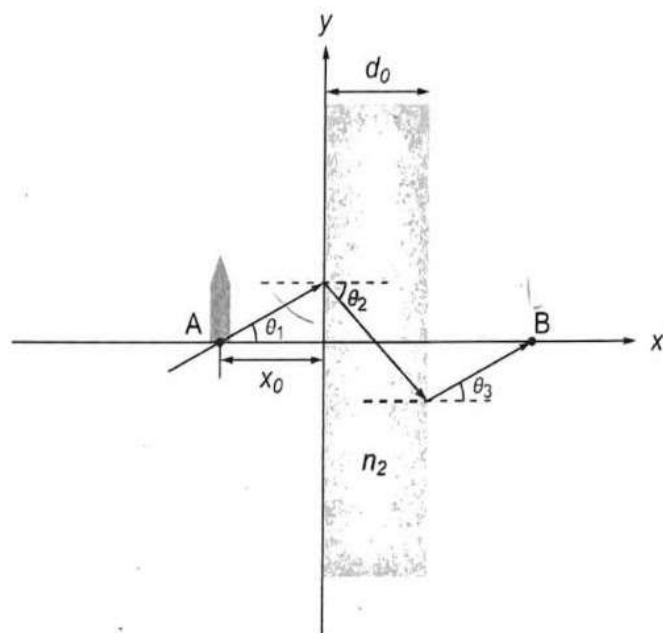


圖 3

考慮水平偏振的情況。

入射波： $\vec{E}_I = \text{Re}\{\vec{E}_{I0} \exp(-i\omega t + i\vec{k}_I \cdot \vec{r})\}$, $\vec{B}_I = \text{Re}\{\vec{B}_{I0} \exp(-i\omega t + i\vec{k}_I \cdot \vec{r})\}$;

反射波： $\vec{E}_R = \text{Re}\{\vec{E}_{R0} \exp(-i\omega t + i\vec{k}_R \cdot \vec{r})\}$, $\vec{B}_R = \text{Re}\{\vec{B}_{R0} \exp(-i\omega t + i\vec{k}_R \cdot \vec{r})\}$;

透射波： $\vec{E}_T = \text{Re}\{\vec{E}_{T0} \exp(-i\omega t + i\vec{k}_T \cdot \vec{r})\}$, $\vec{B}_T = \text{Re}\{\vec{B}_{T0} \exp(-i\omega t + i\vec{k}_T \cdot \vec{r})\}$ 。

$\vec{k}_I = k_1(\cos \theta_1 \hat{x} + \sin \theta_1 \hat{y})$, $\vec{k}_R = k_1(-\cos \theta_1 \hat{x} + \sin \theta_1 \hat{y})$,

$\vec{k}_T = k_2(\cos \theta_2 \hat{x} - \sin \theta_2 \hat{y})$;

$\vec{E}_{I0} = E_{I0}(-\sin \theta_1 \hat{x} + \cos \theta_1 \hat{y})$, $\vec{E}_{R0} = E_{R0}(-\sin \theta_1 \hat{x} - \cos \theta_1 \hat{y})$,

$\vec{E}_{T0} = E_{T0}(-\sin \theta_2 \hat{x} - \cos \theta_2 \hat{y})$; $\vec{B}_{I0} = B_{I0}\hat{z}$, $\vec{B}_{R0} = B_{R0}\hat{z}$, $\vec{B}_{T0} = B_{T0}\hat{z}$;

$B_{I0} = E_{I0}k_1/\omega$, $B_{R0} = E_{R0}k_1/\omega$, $B_{T0} = E_{T0}k_2/\omega$;

$k_1^2 - \mu_1\epsilon_1\omega^2 = 0$, $k_2^2 - \mu_2\epsilon_2\omega^2 = 0$ 。

(d) 若已知電磁波在兩個介質的邊界上滿足之的邊界條件為： $\epsilon\vec{E}$, $\vec{B}$ 垂直界面方向的分量連續， $\vec{E}$, $\vec{B}/\mu$ 平行界面方向的分量連續。求 $r = E_{R0}/E_{I0}$ 及 $t = E_{T0}/E_{I0}$ ，以 α 、 β 表示之，其中 $\alpha = \cos \theta_2/\cos \theta_1$, $\beta = \mu_1 n_2/(\mu_2 n_1)$ 。

(e) 求反射係數 R 及透射係數 T 。 R 與 T 滿足什麼關係? 解釋你得到的結果。

五、環形對撞機

位於瑞士與法國邊境的大強子對撞機(LHC)是質子-質子對撞機，是目前能量最高的加速器。假設兩束加速至能量為 7.0 TeV ($1\text{T}=10^{12}$) 的質子束，受到固定均勻磁場的影響而偏折，在圓形軌道內以相反方向作圓周運動，並於某點撞擊，產生相關的粒子。已知質子的電量 $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 、靜止質量約為 $1.0 \text{ GeV}/c^2$ ， $1\text{G}=10^9$ ， $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 為光速。

- (a) 證明一靜止質量為 m_0 、速度為 $\vec{v}$ 的質點受外力時，力 ($\vec{F}$) 與加速度 ($\vec{a}$) 的關係為

$$\vec{F} = \frac{\gamma^3 m_0}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma m_0 \vec{a}$$

其中 $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ 。

- (b) LHC 的圓形軌道半徑為 $R=4.2 \text{ km}$ ，試計算讓質子偏折所需的均勻磁場大小 B 。
- (c) 若兩質子束正面碰撞時，實際上是由兩質子內的夸克或膠子互相作用，其能量僅為質子能量的若干比例。若碰撞時經由弱作用產生一個靜止質量為 m_W 的 W^- 玻色子（動量可能不為 0），並且 W^- 很快的衰變產生一個電子（靜止質量為 m_e ， $m_e \ll m_W$ ）和一個質量為 0、探測器無法偵測的反微中子，示意圖如下圖 4 所示（箭號表示動量方向），令向右為 $+z$ 方向。經探測器測得電子能量 E_e ($E_e \gg m_e$)，角度 $\theta = 60^\circ$ 。試求微中子 z 方向的動量大小。以 m_W ， E_e 與光速 c 表示。



圖 4