

2022年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2022年4月4日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的正面答案紙上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2022 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、碰撞問題

如下圖 1 所示，質量均為 m 的 A、B、C 三個彈性小球，以兩段長度同為 ℓ 且不可拉伸的輕質細繩連結成一直線，靜置於光滑水平面上。現對小球 B 施以一衝力，使其獲得一與細繩垂直的初速度 v_0 。試求：

- (a) A、C 小球第一次相碰時，B 小球的速度。
- (b) 當 A、B、C 三個小球再次成一直線時，B 小球的速度。
- (c) 承(b)小題，A、B、C 三個小球再成一直線時，細繩中的張力 T 。
- (d) 運動過程中 A 小球的最高動能 E_{K_A} 以及此時二細繩間的夾角 θ 。

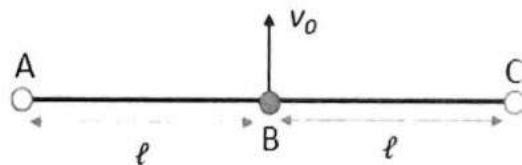


圖 1

- (e) 如下圖 2 所示，若中間的 B 小球的質量變為 M ，則質量為 m 的 A、C 兩小球相碰時，細繩中的張力 T_2 為何？
- (f) 若從質量為 M 的 B 小球開始運動至質量為 m 的 A、C 兩小球第一次相碰的時間為 t ，則在此期間內 B 小球經過的位移 S_B 為何？

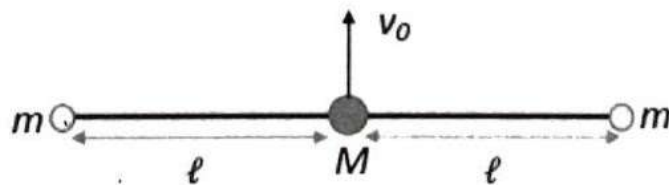


圖 2

二、三角稜鏡

有一個等腰稜鏡的頂角為 α ，兩腰的長度為 L 、底邊寬度為 t ，如下圖 3 所示；其中 θ_i 是入射光與法線的夾角(即入射角)；而 δ 為偏向角，即穿過稜鏡透射光與入射光之間的夾角。已知空氣折射率等於 1，而稜鏡的折射率為 n ，回答下列問題

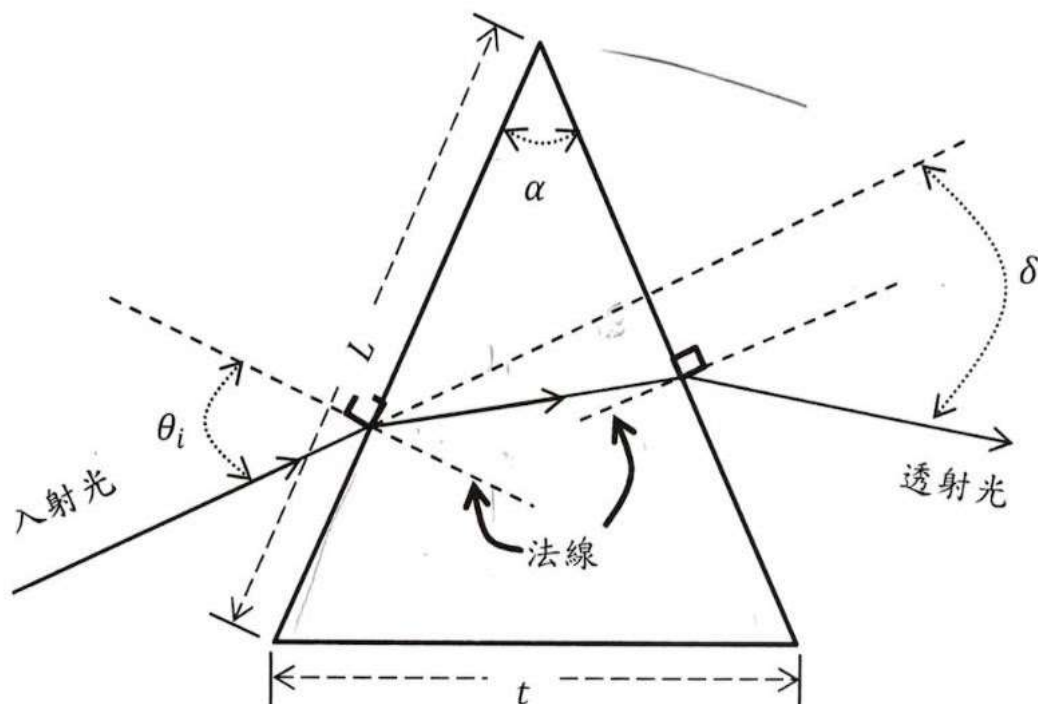


圖 3

- 求偏向角 δ 。以折射率 n 、入射角 θ_i 和頂角 α 的表示式。
- 承(a)，令最小偏向角為 δ_m ，而 $n = f(\delta_m, \alpha)$ ，即稜鏡折射率 n 可以表示為 δ_m 和 α 的函數，求此函數 $f(\delta_m, \alpha)$ 表示式。
- 在最小偏向角的條件下，證明

$$2L \sin \theta_i = nt$$

因為稜鏡折射率 $n(\lambda)$ 通常是波長 λ 的函數，若折射率等於 $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$ ，其中 A 、 B 均為常數。因此 δ_m 也是波長 λ 的函數，回答下列問題

- 由(c)的結果，求角色散 $D \equiv \frac{d\delta_m}{d\lambda}$ 。(角色散是描述不同波長的光如何分散的函數)
- 下圖 4 是稜鏡分光示意圖，光源經過一個透鏡，讓波長為 λ 和 $\lambda + d\lambda$ 光束入射稜鏡；經稜鏡折射再聚焦在螢幕上，當 λ 光最強的位置恰好落在 $\lambda + d\lambda$ 光強度極小的位置時，表示兩個波長恰可分辨，此稱之為瑞立判據或雷利準則。 $\overline{AB}$ 為波長 $\lambda + d\lambda$ 的光路徑， $\overline{ACD}$ 為波長 λ 的光路徑，其中 b 為光束截面的寬度，近似等於 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{DE}$ 的長度， $d\theta$ 為波長為 $\lambda + d\lambda$ (虛線表示)和 λ (實線表示)兩道透射光的夾角， $d\theta \ll 1$ 。已知解析度 R 的定義為 $\frac{\lambda}{d\lambda}$ ，求此稜鏡的解析度 R 。以 B 、 t 、 λ 表示。

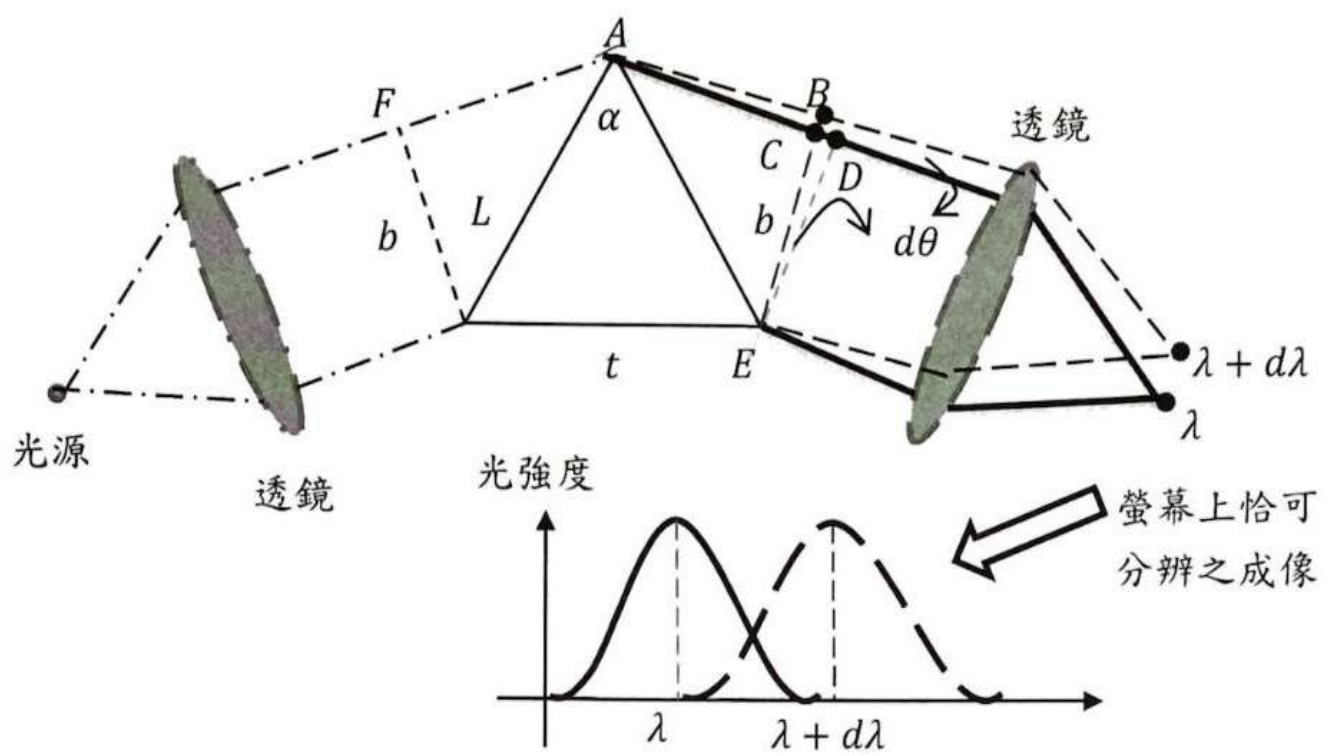


圖 4

三、水管中的水流

本題探討不同幾何形狀截面積的水管，其穩定體積流量 Q 與終端壓力差 ΔP 的關係。本題所考慮為不可壓縮流體的層流(incompressible laminar flow)。此流體具有黏

滯性，其黏滯力為 $F = \eta A \frac{dv}{dx}$ (參見圖 5)。 A 為流體面積； η 為黏滯係數，其單位

為 N s/m^2 。假設管長為 L ，沿著管長 z 方向的壓力梯度變化為常數，亦即 $\frac{dP}{dz} = \frac{\Delta P}{L} \equiv G$ 。

(a) 我們首先考慮一個半徑為 R 的圓柱管 (圖 6)。請考慮力平衡，試求在距圓心 r 處的流體層，流速變化率 $\frac{dv}{dr}$ 與終端壓力差 ΔP 的關係。

(b) 利用(a)的結果，求出流速 $v(r)$ 。

(c) 請求出流量 Q 與終端壓力差 ΔP 的關係。

(d) 重複以上的步驟，請計算內徑 R_1 、外徑 R_2 的環狀截面水管 (圖 7) 的 $v(r)$ 與 Q 。

(e) 試計算一方形截面水管 (圖 8) 的 $v(x)$ 與 Q ，此水管截面間隙 h 、寬度 w 且 $w \gg h$ 。 Q 為 w 方向每單位長度的流量； x 為 h 方向的座標； $x=0$ ， $x=h$ 為管壁處。

圖 5

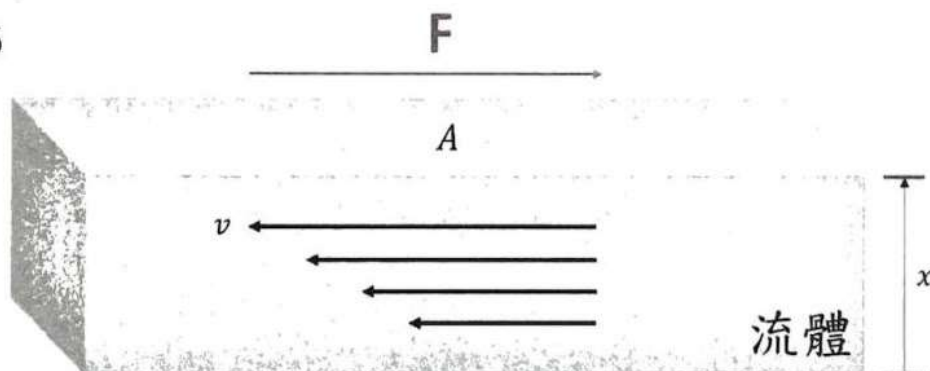


圖 6

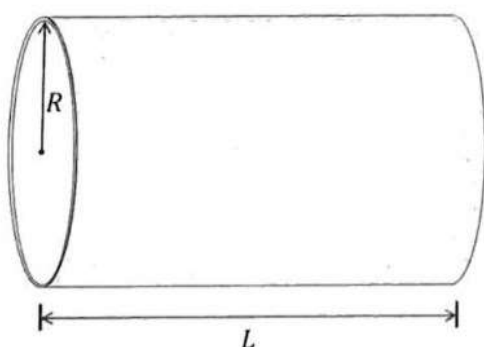


圖 7

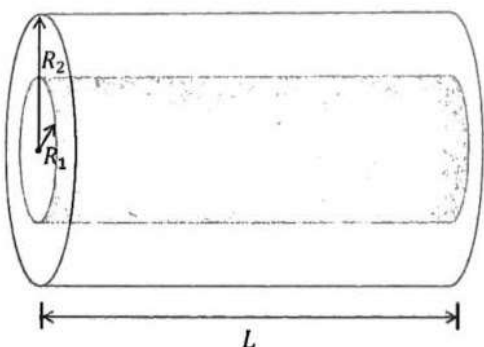
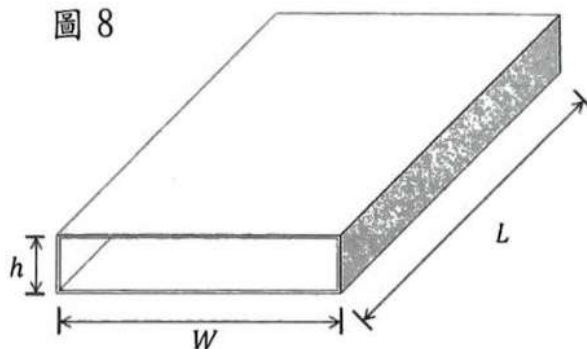


圖 8



四、雷射光束

此題探討為何雷射光能自我聚焦成可長距離傳播的光束。若一各向同性之介電物質(流體如氣體與液體皆可被視為各向同性之介電物質)置於強電場下而被極化，其極化強度與電場的關係可以一非線性函數表示：

$$\vec{P} = \epsilon_0(\chi_1 \vec{E} + \chi_3 E^2 \vec{E} + \dots)$$

- (a) 利用提示中所提供液態氮的資訊，估算液態氮的電極化率 χ_1 數值。
- (b) 已知光能量達大約 15 eV 時，能幾乎使一大氣壓室溫 (27 °C) 的氮氣電離，此時非線性項之量值會比線性項高兩個數量級。請根據此資訊，估算氮氣的電極化率 χ_1 與 χ_3 的數值。
- (c) 若所施加的強電場來自一雷射光，此非線性極化現象會導致電場較強的地方折射率較大，其折射率在光束中的徑向梯度很像光纖裡的狀況，所以雷射光本身可以好好的被侷限在一個「光管」區域裡。

假設波長 λ 的雷射光以很小的角度 $\theta \approx \lambda/w$ 聚焦，入射一非線性介電物質(如下圖 9)，其中 w 為其在介電物質表面上聚焦區域之半徑。請問能讓雷射光在介電物質內被侷限在一固定半徑之光管的所需的最小雷射光功率是多少？(用雷射光波長 500 nm 來估算此題。)

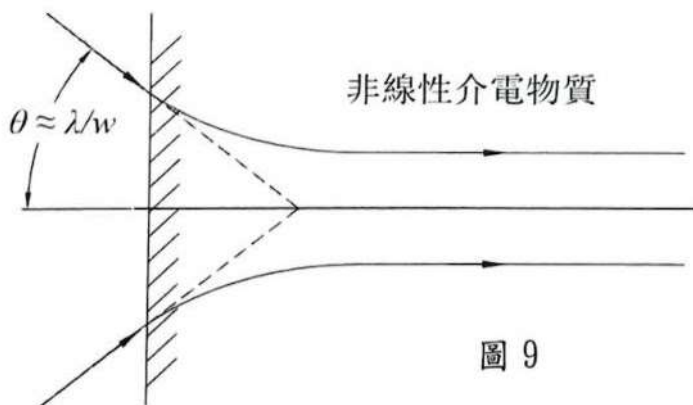


圖 9

提示：

- (1) 折射率 $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ ，其中 ϵ 滿足此式： $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$ 。
- (2) 液態氮的折射率是 1.2，密度是 0.8 g/cm³。而電極化率 χ 與流體密度成正比。
- (3) 氮原子尺寸為 0.92 Å。
- (4) $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ 。

五、核融合溫度

作答時可能用到的數據：

(i)真空中光速 $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$ ，普朗克常數 $h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}$ ，基本電荷 $e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\text{ C}$ ，波茲曼常數 $k = 1.380\,649 \times 10^{-23}\text{ J/K}$ 。

(ii)原子質量常數 m_u 亦即原子質量單位 u （與 $\text{Da} = \text{dalton}$ 相同），其定義為

$$m_u \equiv m(^{12}_6\text{C})/12 \equiv 1\text{ u}$$

$$1\text{ u} = 1.660\,539\,066\,60(50) \times 10^{-27}\text{ kg} = 931.494\,102\,42(28)\text{ MeV}/c^2$$

$$m_u c^2 = 1.492\,418\,085\,60(45) \times 10^{-10}\text{ J}$$

第一式中的 $m(^{12}_6\text{C})$ ，代表自由且靜止之 $^{12}_6\text{C}$ 原子處於電子、核子基態時的質量。

(iii)電子(e)、質子(p)、中子(n)、氘核(d)、 α 粒子的質量分別為

$$m_e = 5.485\,799\,090\,65(16) \times 10^{-4}\text{ u}$$

$$m_p = 1.007\,276\,466\,621(53)\text{ u}$$

$$m_n = 1.008\,664\,915\,904(473)\text{ u}$$

$$m_d = 2.013\,553\,212\,745(40)\text{ u}$$

$$m_\alpha = 4.001\,506\,179\,127(63)\text{ u}$$

(iv)氫(^1_1H)、氘(^2_1H)、氦(^4_2He)、氧($^{16}_8\text{O}$)的原子質量分別為

$$m(^1_1\text{H}) = 1.007\,825\,031\,898(14)\text{ u}$$

$$m(^2_1\text{H}) = 2.014\,101\,777\,844(15)\text{ u}$$

$$m(^4_2\text{He}) = 4.002\,603\,254\,130(158)\text{ u}$$

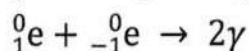
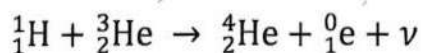
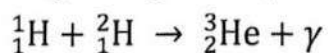
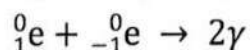
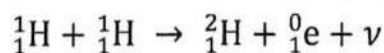
$$m(^{16}_8\text{O}) = 15.994\,914\,619\,257(319)\text{ u}$$

(v)真空電容率 $\epsilon_0 = 8.854\,187\,8128(13) \times 10^{-12}\text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ 。

試回答下列問題：

(a) 尤里(Harold Urey)於1931年依據波耳氫原子模型，分析氫原子從較高的能階躍遷到量子數 $n=2$ 的能階時所發出的可見光譜線(即Balmer系列光譜線)，發現同一種顏色都有一強一弱的兩條光譜線，兩者的波長 λ 、 λ' 相當接近，因而發現了重氫(也就是氘)的存在。若一光譜儀能分辨出其中波長最長之顏色的兩條光譜線，則其測得的 $(\lambda - \lambda')/\lambda$ 為何？(須含四位有效數字。)

(b) 恆星中心處進行的核熔合反應，包含下列稱為「p-p循環」的一系列反應：



(b-1) 試求上述 p-p 循環所有反應合計所釋出的總能量 Q (稱為反應能量)。(須含四位有效數字。)

(b-2) 將恆星視為游離之氫原子所組成的理想氣體圓球(含相同數目的質子與電子)，在自身重力與氣體壓力作用下，處於平衡狀態，半徑固定不變。已知兩原子核 A 與 B 要進行核熔合反應時，必須克服庫倫斥力，使兩者之間的距離接近到足以使短距程(約為 2 fm)

的核力發生作用。考慮粒子的德布羅依(de Broglie)物質波與測不準原理，試估計恆星中進行 p-p 循環所需具備的溫度。(須含兩位有效數字)。