

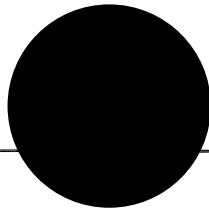
2024年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(一)試題

2024年3月30日 08:10-12:10

姓名：



- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的**正面**答案紙上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2024 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(一)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、平面上的質點

本題考慮一被限制在光滑水平面上作線性振盪或圓周運動的帶電質點。

- (a) 如圖 1 所示，一系統由一與平面上原點 O 距離為 r ，質量為 m ，帶電量為 $-q$ 的質點，以及在 O 點正下方距離為 R 處另置有一帶有電量 $+Q$ 的固定質點所組成，且 $Q \gg q > 0$ ， $R \gg r$ 。試回答下列問題。

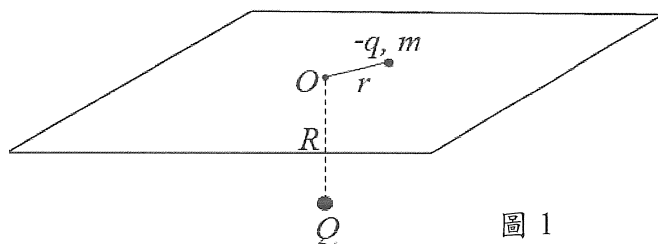


圖 1

- (i) 試求該質點在 r 處電位能的近似表達式至 r/R 的二階項。
 - (ii) 若該質點以振幅 a ($a \ll R$) 作線性振盪，其振盪角頻率 ω_ℓ 為何？
 - (iii) 若該質點在平面上作半徑為 r ($r \ll R$) 的圓周運動，其角頻率 ω_c 為何？
- (b) 承(a)題，現若在平面上原點 O ，另外放置一電量同為 $-q$ 的固定點電荷，如圖 2 所示，試回答下列問題。

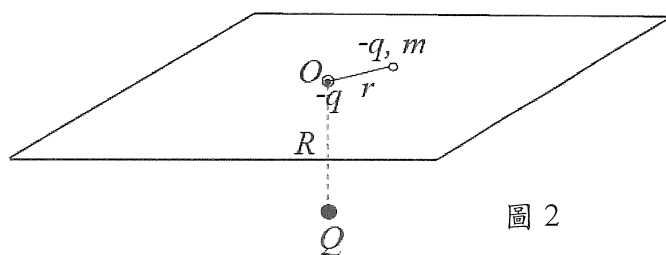


圖 2

- (iv) 平面上質量為 m 、帶電量為 $-q$ 的質點，其相對於原點 O 的平衡位置 r_0 為何？(以 R 、 q 、 Q 表示)
- (v) 若該平面上的帶電質點以振幅 a ($a \ll r_0$)，在平面上作線性振盪，求其角頻率 Ω_ℓ 為何？
- (vi) 若該帶電質點在平面上以半徑 $r = r_0 + \delta r$ ($\delta r \ll r_0$) 作圓周運動，則其角頻率 Ω_c 為何？(以 ω_c 、 r_0 和 δr 表示)

二、色散和全反射

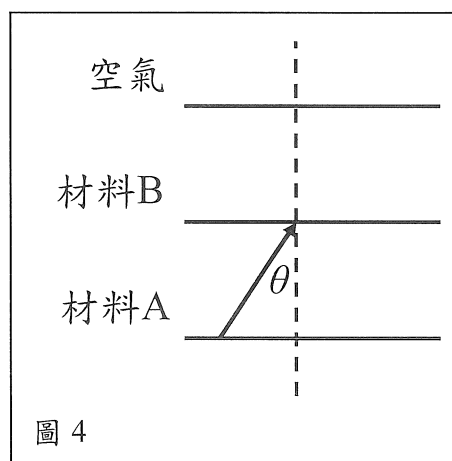
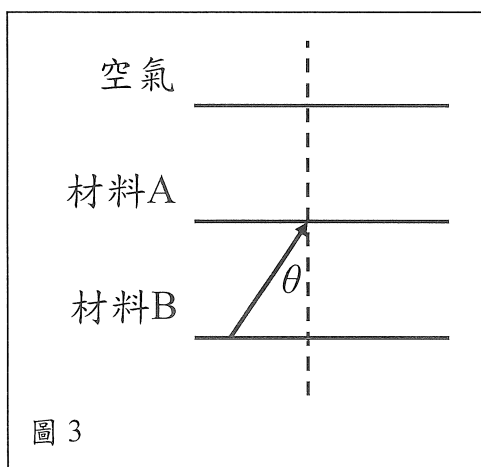
不同波長的電磁波有不同的折射率，根據柯西(Cauchy)提出來的模型，在電磁波可以透射的材料中，折射率 n 和波長 λ 的關係可以寫成

$$n = n_0 + \frac{n_1}{\lambda^2} + \frac{n_2}{\lambda^4} + \frac{n_3}{\lambda^6} + \dots,$$

對於大多數的材料，柯西模型只需要計算到 n_1/λ^2 項就足夠。現有 A、B 兩個材料，

折射率 $n_B > n_A > 1$ ，且 $n_A = n_{A0} + \frac{n_{A1}}{\lambda^2}$ ， $n_B = n_{B0} + \frac{n_{B1}}{\lambda^2}$ 。

- (a) 如圖 3 所示，一束多色光從 B 材料發射，在材料 B 和材料 A 的界面以入射角 θ 進入 A 材料，接著穿過材料 A 而進到空氣(折射率 $n_{\text{air}} = 1$)。若此光束中最短波長($\lambda_{\min}$)的光在材料 A 和空氣界面的入射角恰為全反射的臨界角 $\theta_{C,\min}$ ，計算
- 此光束在材料 B 和材料 A 界面的入射角 θ ，
 - 最長波長($\lambda_{\max}$)的光在材料 A 和空氣界面的折射角 $\theta_{1,\max}$ 。
- (用 n_{A0} 、 n_{A1} 、 n_{B0} 、 n_{B1} 、 $\lambda_{\min}$ 、 $\lambda_{\max}$ 表示)
- (b) 當此光束穿透材料的順序改為從材料 A 穿過材料 B 到空氣(如圖 4)，而且光束在材料 A 和材料 B 界面的入射角仍是前一小題的 θ ，分別計算波長 $\lambda_{\max}$ 、 $\lambda_{\min}$ 的光從材料 B 進入空氣的折射角 $\theta_{2,\max}$ 、 $\theta_{2,\min}$ 。(用 n_{A0} 、 n_{A1} 、 n_{B0} 、 n_{B1} 、 $\lambda_{\min}$ 、 $\lambda_{\max}$ 表示)
- (c) 承(b)，A 材料選用熔融石英(fused silica)， $n_{A0} = 1.4580$ 、 $n_{A1} = 0.00354 \mu\text{m}^2$ ；B 材料則選用硬冕牌玻璃(hard crown glass)， $n_{B0} = 1.5220$ ， $n_{B1} = 0.00459 \mu\text{m}^2$ 。當 A、B 的厚度都是 2.00 cm，且此光束是可見光， $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$ ， $\lambda_{\max} = 700 \text{ nm}$ 時，計算 $\theta_{2,\min}$ 、 $\theta_{2,\max}$ 的數值。若使用一個 10.00 cm 寬的屏幕恰好能完整看到所有色光的分布，則屏幕的中心點和材料 B/空氣界面之透射光束中心點的距離 L 為何？



三、滑輪彈簧系統

有一力學系統如下圖 5，彈力係數為 k 之輕質彈簧的上端固定不動，下端懸掛一個質量為 M 、半徑為 R 、轉動慣量為 I 的滑輪，通過滑輪之輕質細繩的左端固定於地面、右端懸掛一個質量為 m 的質點，細繩與滑輪間無滑動。滑輪及質點在鉛直方向上做微幅的振盪，且細繩始終保持在拉直的狀態，彈簧伸長量的最大值為 L 。假設力學能守恆，重力加速度為 g 。

- (a) 求彈簧伸長量的最小值。
- (b) 當質點達到最大速率時，求該系統之移動動能與轉動動能的比值。
- (c) 求該系統的振盪週期。
- (d) 若要使「細繩始終保持在拉直的狀態」，則 L 必須滿足什麼條件

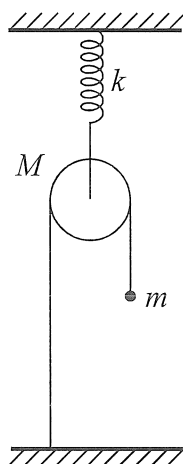


圖 5

四、傳輸線 (Transmission Line)

在電子線路中當電訊號頻率(f) 相應的波長(λ)與電線長度(l)相當時，電訊號的相位和反射在傳播中變得很顯著，傳輸線長度變得很重要，不再可以被忽略。假設在一段傳輸線是均勻的並沒有損耗(Lossless)，傳輸線可用由電容 (C)與電感(L)組成的網路的電路模型來表示，如圖 6(a)所示。其上任一點(座標 x)的電壓 $v(x,t)$ 與電流 $i(x,t)$ 可表為

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\end{aligned}$$

電壓與電流以波的形式在傳輸線內傳遞。可用複數 $j = \sqrt{-1}$ 表示：

$v(x,t) = \text{Re}[V(x)e^{j\omega t}]$, $i(x,t) = \text{Re}[I(x)e^{j\omega t}]$, 其中 $V(x)$ 與 $I(x)$ 可表示為：

$$V(x) = V_0^+ e^{-j\beta x} + V_0^- e^{j\beta x} \quad (1.1)$$

$$I(x) = I_0^+ e^{-j\beta x} + I_0^- e^{j\beta x} \quad (1.2)$$

此處 $\frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-} = Z_c \left(= \sqrt{\frac{L}{C}} \right)$, Z_c 稱為此傳輸線的特徵阻抗，在座標 x 點的阻抗

$Z(x) = V(x)/I(x)$ 。此處 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi f$ 。

(a) 考慮一段傳輸線特徵阻抗 Z_0 連結一個負載其阻抗為 Z_L ，如圖 6(b) 所示。令反射

係數 $\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+}$ ，求在 $z = 0$ 處， Γ 與 Z_0 與 Z_L 的關係。

(b) 同(a)，傳輸線於在 $x = -l$ 處與電源相接，求在 $x = -l$ 的阻抗 $Z_i (= V(-l)/I(-l))$ 。

以 Z_0 、 Z_L 與 βl 來表示。此處定義的 Z_i 可視為為從電源處朝向負載所看到的阻抗，亦被稱為輸入阻抗

(c) 考慮圖 6(c)所示電路，現將一特徵阻抗為 Z_1 的傳輸線，線長為 l ，連結於阻抗為 Z_0 與 Z_L 中間。求在 $x = -l$ 處的 Γ 。

(d) 同(c)，若對某特定電訊號波長為 λ ，現在令 $l = \lambda/4$ ，設計 Z_1 的值使得電訊號在 $x = -l$ 處完全穿透，即 $\Gamma = 0$ 。在此條件下稱阻抗匹配，而此段傳輸線稱為四分之一波長轉換器(Quarter-wavelength transformer)。

(e) 求在(d)中 Z_1 條件下，對一般波長的 $|\Gamma|$ 值。

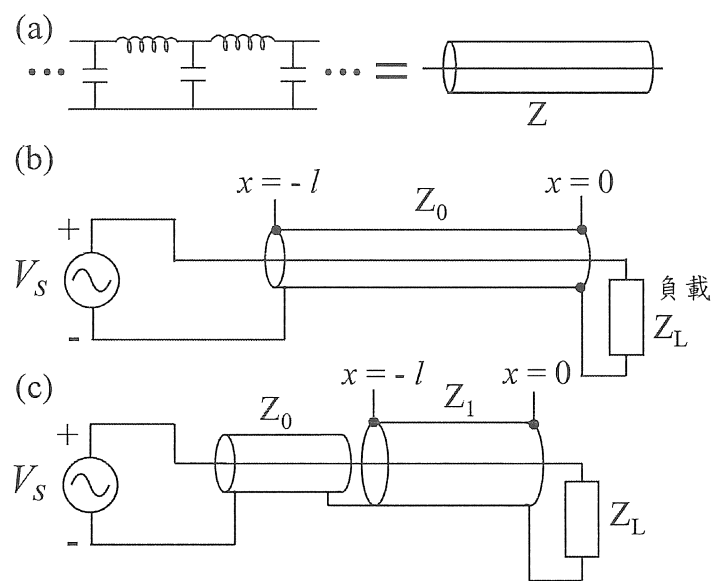


圖 6

五、繩上橫波的能量

在下列各題中，均勻細繩的線密度為 μ ，繩上橫波的波速為 c ，重力的效應可忽略。

A 部分 兩端固定的駐波

考慮兩端固定、長度為 L 的張緊細繩上出現的駐波橫波。已知繩子各部分以角頻率 ω 做微幅的簡諧振盪，且 L 遠大於波長 $\lambda = 2\pi c/\omega$ 。若在此繩上任取一段長度等於波長 λ 的分段 S ，並以 $K_\lambda(t)$ 與 $U_\lambda(t)$ 分別代表分段 S 在時間為 t 時的動能與形變位能，則

- (a) 若分段 S 位於 $x = 0$ 到 $x = \lambda$ ，則 $K_\lambda(t)$ 與 $U_\lambda(t)$ 分別為何？
- (b) $K_\lambda(t)$ 與 $U_\lambda(t)$ 是否會隨著分段 S 在 x 軸上的位置而變？
- (c) 對任意的分段 S 而言， $K_\lambda(t) + U_\lambda(t)$ 是否會隨時間 t 而變？

B 部分 兩個駐波疊加後形成的行進波

- (d) 將一根長度為 L 的細繩沿水平 x 方向張緊後，使位於 $x = L$ 的繩子右端保持固定不動，並於左端 $x = 0$ 處施加沿 y 方向的垂直力 $F \cos \omega t$ ，試求達穩定態時，細繩的垂直位移 y_0 隨位置 x 與時間 t 變化的函數 $y_0(x, t)$ 。
- (e) 今與上題(d)部分相同，考慮一根長度為 L 、沿水平 x 方向張緊的細繩，但使位於 $x = 0$ 的繩子左端保持固定不動，而於右端 $x = L$ 處施加沿 y 方向的垂直力 $-F \sin \omega t$ ，試求達穩定態時，細繩的垂直位移 y_L 隨位置 x 與時間 t 變化的函數 $y_L(x, t)$ 。
- (f) 若(d)與(e)中的兩個駐波 $y_0(x, t)$ 與 $y_L(x, t)$ 疊加後，可以在 $x = 0$ 到 $x = L$ 的繩段上行成沿 $+x$ 方向傳播的行進波 $y(x, t)$ ，則
 - (i) kL 必須為何？
 - (ii) 行進波 $y(x, t)$ 的能量時變率 $\dot{E}$ 為何？

2024年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

筆試(二)試題

2024年4月2日 08:10-12:10

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的答案紙**正面**上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

2024 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營筆試(二)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、電子的半徑

電子為一具有質量(m)、電量($-q$)以及磁矩(μ)的基本粒子。本題嘗試以一簡單模型和古典電磁學來探討電子的一些基本物理性質。假設將電子模擬為半徑為 R 的薄球殼，球面上均勻分布總電量為 $-q$ 的電荷，而其磁矩則源自其繞通過球心轉軸的快速自轉，試回答以下問題。

(積分公式： $\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$)

- (a) 以因次分析法求電子磁矩 μ 與電荷 $-q$ 、光速 c 和電子半徑 R 的函數關係。
- (b) 若相對於球殼中心，球殼表面上任何一點的速度均不可能超過光速，則電子可能帶有的最大磁矩為何？
- (c) 已知電子的磁矩亦可表為 $\mu = \frac{q\hbar}{2m}$ ，其中 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 為約化普朗克常數， h 為普朗克常數。試求在(b)小題的模型架構下，電子的最小半徑為何？(以 m 和其他基本常數表示。)
- (d) 承(c)小題所得電子半徑，估計儲存在電子電荷所建立的電場中之靜電能。(答案以電子靜止能量 $E_0 = mc^2$ 和精細結構常數 $\alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ 表示。)
- (e) 假設因電子自轉建立的磁場，係均勻分布在球殼內部且約為定值 B_0 (即球心位置的磁場量值)，球殼外部磁場可以忽略。試依此假設，
- (i) 估算 B_0
- (ii) 估計儲存於電子內部的磁能為何？(答案以(d)小題中所述的 E_0 和 α 表示。)

二、相對論：四維動量

本題所提及的物理量除了(d)中的壓力計讀數外，都是相對於實驗室參考系。

考慮一質量為 m 的粒子以相對論性的速度 $v\hat{x}$ 朝 $+x$ 方向運動。現有一顆頻率為 f_i 的光子，自遠處 ($x \rightarrow +\infty$) 朝 $-x$ 方向入射與粒子做一維的碰撞。

- (a) 如果該碰撞為完全非彈性 (光子被粒子吸收)，碰撞後粒子速度的 x 分量 u 為何？
(以 f_i 、 c 、 m 和 v 表示，可用勞倫茲因子 $\gamma_v \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 來簡化表達式)
- (b) 如果碰撞為完全彈性 (粒子內能無變化，光子猶如碰到鏡面被反射回去)，則反彈後光子的頻率 f_r 為何？ (以 f_i 、 c 和 u 表示，可以用勞倫茲因子 $\gamma_u \equiv (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ 來簡化)
- (c) 將粒子換成一自帶驅動的平面鏡，不因碰撞影響而能維持等速率 v 沿 $+x$ 方向運動。鏡面朝 $+x$ 方向而能將入射光子反射回去，則反射後光子的頻率 f_r 為何？
(以 f_i 、 c 和 v 表示)
- (d) (承(c)小題) 將入射光子改成光束，其能量通量密度為 S_i (W/m^2)，則反射光束的能量通量密度 S_r 為何？設置在平面鏡背後的壓力計 (提供單位面積單位時間需要供給多少動量以維持平面鏡等速運動的資訊) 之讀數為何 (J/m^3)？ (答案均以 S_i 、 c 和 v 表示)

三、質子大小

氫原子是由一個質子和一個電子組成。波爾氫原子模型是將質子視為點電荷，且質量遠大於電子，在量子化後可得氫原子能階。不過，質子並非是沒有內部結構的質點，因此實驗上，可以透過氫原子光譜或散射實驗來測量質子的大小。

- (a) 已知基態的氫原子電子空間分布機率函數為 $\psi_1(r) = Ae^{-r/a}$ ， A 為一常數，即電子在以質子中心為原點的極座標空間中， $r \rightarrow r + dr$, $\theta \rightarrow \theta + d\theta$, $\phi \rightarrow \phi + d\phi$ 的體積 dV 內的機率為 $|\psi_1(r)|^2 dV$ ，其中 r 為電子與質子中心的距離， $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ 為波爾半徑， $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ， h 為普朗克常數， m ， e 各為電子質量與電量大小。是根據以上資訊
- (i) 求常數 A 。
- (ii) 若將質子視為點電荷，求氫原子基態能量 E_1 。
- (iii) 若質子的電荷視為球對稱的均勻分布，且球的半徑為 R ，此時氫原子基態能階為 E_1' ，試計算此模型的基態能量與上小題(ii)點電荷的差異 $\Delta E_1 = E_1' - E_1$ 為何？
- (b) 若將高能量電子與質子散射，此過程的散射截面(scattering cross section)與質子的結構因子 $|F(q^2)|^2$ 成正比，其中 q 為電子散射時的動量改變量。已知此結構因子與質子的電荷分佈恰為傅立葉轉換，即

$$F(q^2) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} \rho(r) dV$$

其中 $\rho(r)$ 與基本電荷電量 e 的乘積 $e\rho(r)$ 為質子的電荷密度分佈。

- (i) 若定義質子的平均半徑 $\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) dV$ ，可得出關係式：

$$\langle r^2 \rangle = \beta \left[\frac{dF(q^2)}{dq^2} \right]_{q^2=0}, \text{ 求 } \beta = ?$$

- (ii) 若將質子的電荷視為球對稱的均勻分布，且球的半徑為 R 。求結構因子 $F(q^2)$ 。
- (iii) 承上題(b)-(i)(ii)，求 $\langle r^2 \rangle$ 。

四、量子簡諧振子

簡諧振子是一個簡單而重要的力學系統，它在古典力學和量子力學中都經常出現。設系統中質點的質量為 m ，彈簧的力常數為 k 。

- (a) 利用 Sommerfeld 量子化法則： $\oint p dx = nh$ ，即動量對位移積分一個週期為普朗克常數 h 的整數倍，證明一維簡諧振子的量子能譜為 $E_n = n\hbar\omega$ 。這裡 $\hbar = h/(2\pi)$ ， $\omega = \sqrt{k/m}$ 是系統的自然角頻率。
- (b) 利用測不準原理： $(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar/2$ ，證明一維簡諧振子的最低能量為 $\hbar\omega/2$ 。

$\hbar\omega/2$ 是一維簡諧振子的基態(最低能量狀態)的能量。這個能量不是零，稱為真空能量。量子力學系統也和古典力學系統一樣，在平衡點附近的小幅振盪可以用簡諧振子來作近似。

- (c) 氫和氘是同位素，氫原子的原子核是一個質子，而氘的原子核則是一個質子跟一個中子。他們的物理特性幾乎完全一樣，唯一的差別是兩者的原子核質量不同，換言之，氫和氘分子在平衡點附近有相同的等效力常數。若已知氫分子(H_2)和氘分子(D_2)的解離能分別是4.49 eV及4.57 eV，求這兩個分子的等效力常數 k 的數值。假設質子和中子的質量 M 相同，且 $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg。
- (d) 利用(c)的結果，求氫-氘分子(HD)的解離能(eV)。

綜合(a)、(b)小題的結果可以得到正確的一維簡諧振子能量譜 $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ ，其中 n 是大於等於零的整數。在以下各題，可以直接用這個結果進行計算。

- (e) 若一個巨觀系統中有 N 個彼此沒有交互作用的一維簡諧振子，文獻上稱為「愛因斯坦模型」。我們可以用量子統計力學求得此系統的熱力學內能： $U = N \sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\{-E_n/(k_B T)\}$ ，這裡 k_B 是波茲曼常數，而 T 是絕對溫度。求此系統的定容比熱 $C_V \equiv \partial U / \partial T$ 。

- (f) 定性畫出 C_V 隨溫度的變化。這裡的 C_V 與古典物理中的能量均分原理有什麼差異？定性解釋為什麼會有這些差異。

五、帶有自轉之桌球的反射定律

如下圖 1 所示，假設桌球可視為一半徑為 r 、質量為 m 的均勻球殼， xy 平面為桌球拍的拍面，桌球質心以速度 $\vec{v}$ 入射到拍面，假設 $\vec{v}$ 落在 yz 平面，且與 z 軸夾角為 θ ，桌球的自轉角速度為 $\vec{\omega}$ ，其方向如下圖 2 所示，其中 θ_ω 為 $\vec{\omega}$ 與 z 軸之夾角， x_ω 軸在 $\vec{\omega}$ 與 z 軸之共平面上、且垂直 z 軸， ϕ_ω 則為 $\vec{\omega}$ 在 xy 平面上投影(投影點在 x_ω 軸上)與 x 軸的夾角。為了了解帶有自轉之桌球的反射行為，首先假設桌球拍的速度固定為 0 (即為固定在靜止狀態)，重力加速度為 g ，方向朝 $-z$ ，桌球與桌球拍在 z 軸方向的碰撞之恢復係數為 1，即在 z 軸方向的碰撞為彈性碰撞。桌球與桌球拍的碰撞時間極短使得碰撞期間，重力可忽略不計，且桌球與桌球拍在碰撞期間的變形亦可不計，但在碰撞期間桌球與桌球拍間有相對的滑動，若桌球與拍面間的動摩擦係數為 μ ，試回答以下問題：

- 試求出桌球對質心的轉動慣量 I 。
- 設桌球與桌球拍碰撞的接觸點為 A ，求出碰撞前一瞬間，桌球上 A 點的速度 $\vec{v}_A$ [以 $\vec{v}$ 、 $\vec{\omega}$ 、 $\hat{z}$ (z 軸的單位相向)等物理量表示]。
- 試求出碰撞後桌球的質心速度 $\vec{u}$ (以 r 、 v 、 θ 、 θ_ω 、 $\vec{\omega}$ 、 $\hat{z}$ 、 $\hat{y}$ 以及 μ 等物理量表示)。
- 試求出碰撞後桌球的自轉角速度為 $\vec{\omega}'$ (以 r 、 v 、 θ 、 θ_ω 、 $\vec{\omega}$ 、 $\hat{z}$ 、 $\hat{y}$ 、 μ 以及 x_ω 軸的單位向量 $\hat{x}_\omega$ 等物理量表示)。
- 現在假設桌球拍的速度固定為 $\vec{v}_0 = v_0 \hat{y}$ ($v_0 > 0$)，桌球質心入射速度仍是 $\vec{v}$ ，只是**沒有自轉**，即 $\vec{\omega} = 0$ ，這是所謂的切球。這時只要桌球拍速度夠快，使得 $v_0 > v \sin \theta$ ，此時存在一個特殊的角度 $\theta = \theta_0$ ，不論桌球拍速度多快，桌球皆會沿原入射方向返回，但此時桌球的自轉角速度為 $\vec{\omega}'$ 不為零，試求 θ_0 以及 $\vec{\omega}'$ (以 r 、 v 、 μ 、 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 以及 $\hat{z}$ 等物理量表示)。

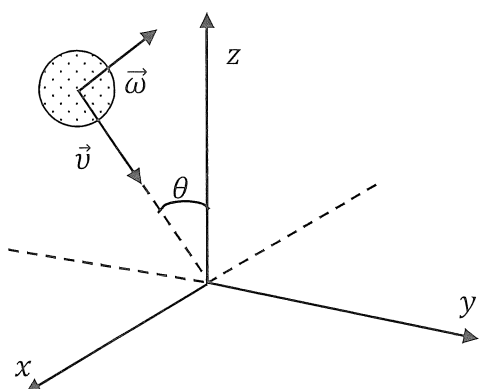


圖 1

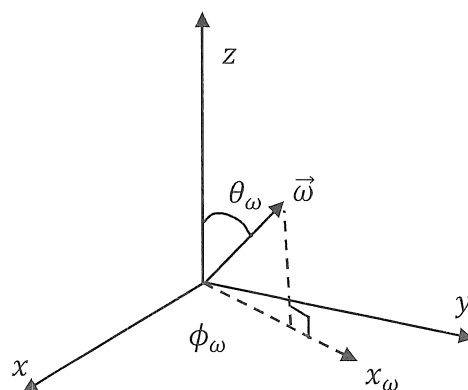


圖 2

2024年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊決選研習營

理論模擬試題

2024年4月3日 08:10-13:10

- 一. 本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。
- 二. 考試時間五小時。
- 三. 限以藍色或黑色原子筆作答。
- 四. 在指定的**正面**答案紙上作答。
- 五. 可使用無程式掌上型計算機。
- 六. 在每題開始時換用新頁。
- 七. 在每一頁答案紙的頂端寫明：

- 題號
- 該題所用答案紙之頁碼
- 該題所用答案紙的總頁數

例(以第一題用了三頁紙為例)：

—	1	1/3
—	2	2/3
—	3	3/3

2024 年物理奧林匹亞國家代表隊選拔考試
決選研習營理論模擬試題

本試題共三大題，每大題 50 分，總分 150 分。

一、阿秒脈衝 (attosecond pulse) 的產生

阿秒為 10^{-18} 秒，時間長度為阿秒等級(空間長度為 3×10^{-10} m)的阿秒脈衝可用以定格拍照(snap shot)物質中電子的運動。然而要產生阿秒脈衝並不容易，特別是既有的光源之週期皆大於 10^{-18} 秒，需要應用新的原理方法才能產生阿秒脈衝，本問題探討產生阿秒脈衝的方法。

(a) 以低頻光產生阿秒脈衝的關鍵元素是非線性，此處以非線性振盪器之驅動振盪說明。

當驅動的角頻率為 ω 時，振盪器運動的頻率可包含 ω 、 3ω 、 5ω …等高頻率的成分。如下圖 1 所示，考慮光滑水平面上一質量為 M 之木塊接在一真實彈簧末端，已知當木塊自彈簧平衡點算起位移為 x 時，彈簧位能有一非線性的小修正，可表示為 $U(x) =$

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\gamma x^4$ ，其中 $0 < \gamma \ll 1$ 。若水平施力為 $F_0 \cos \omega t$ 時($\omega^2 \neq \frac{k}{m}$)，木塊運動穩定時，

位移以 γ 展開可表示為 $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t) + \dots$ ，其中 $x_n(t)$ 為

$O(\gamma^{n-1})$ 。已知精確到 $O(\gamma)$ 時， $x(t) = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t$ ，試求 A_1 與 A_3 。

註： $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x$ 。

4

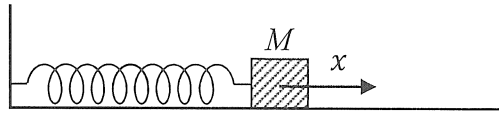


圖 1

(b) 上述(a)小題所處理的情形為驅動力不大時、非線性修正 γ 很小時的情況，此時可以用以 γ 展開之微擾論處理。阿秒脈衝的產生是以很強的極紫外光脈衝(extremely ultraviolet radiation, EUV or XUV，脈衝縮短達到高強度 $10^{12} - 10^{16} \text{ W/cm}^2$ 左右)驅動氣體分子中的電子，此時驅動的電場為強場，與作用在電子之位能之量值相近，非線性項大，故不可再以 γ 展開之微擾論處理。實驗上發現以單一分子受到強振盪電場來即可了解阿秒脈衝產生的機制，假設電場 $\vec{E}$ 在 x 軸方向，即 $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \hat{x}$ ，考慮原子之最外層電子在 x 軸方向的一維運動，設其受原子核庫崙作用之位能 $-\frac{k}{|x|}$ (以無限遠為能量零點， $k > 0$ 且 x 為電子之座標，原子核位於 $x = 0$)，且電子能階之能量為 $-I_p$ ，定義飽和電場 E_{sat} ：當 $E_0 \geq E_{sat}$ ，存在某一段時間，束縛電子的位能勢壘(potential barrier)為零，電子可直接游離逃脫原子，試求 E_{sat} 。

(c) 當驅動的電場達原子游離臨界點之上時，數值計算與實驗皆發現，當將頻率 ω (EUV 波段)的強脈衝射入氣體以驅動氣體分子時，可以產生頻率為 $n\omega$ ($n = 1, 3, 5, 7, \dots$)的光子，每一脈衝所產生的光子數分佈如下圖 2 所示意，其中有一段產生之光子數約為常

數(緩慢遞減)的平台區以及光子數開始減少的截止頻率，而平台中等距、頻率位在 $n\omega$ 的尖峯又稱為頻率為 ω 之脈衝的諧波(harmonics)，它提供了產生阿秒脈衝的可能。回到(b)小題單一分子受到強振盪電場之模型，當電子可被驅動的電場游離時，電子的運動範圍較大，因此被電場加速所得的動能遠比被原子束縛時要大，並且電子由原子核出發，在時間 $mT/2$ ($m = 1, 2, 3 \dots$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 為 EUV 強脈衝的週期)時，電子回到原子核可與離子重新結合放出光子。若放出的光子為平面波，其電場可以表示為 $e^{i[n\omega(t-\frac{x}{c})+\phi_n]}$ ，其中 $n = 2k + 1$, c 為光速， $n\omega$ 即為實驗上所觀測到的諧波， $\phi_n = k\pi$ 為產生光子之電場的相位，已知諧波的範圍為 $k = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + n_p - 1$ ，試求產生光子之總電場脈衝在空間中的半高寬 Δl 以及所對應之脈衝的時間長度 Δt (以 T 、 n_0 、 n_p 以及 c 等物理量表示)。由此可知當 n_p 很大時， Δt 可以縮的很短。

註： $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$

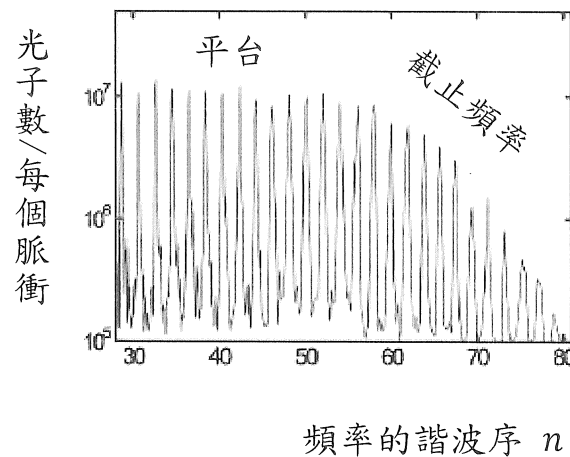


圖 2

二、非對稱物體的自由轉動

蝶形螺絲三個穿過質心的慣量主軸的方向為 $\hat{e}_1$ 、 $\hat{e}_2$ 與 $\hat{e}_3$ ，其轉動慣量分別為 I_1 、 I_2 與 I_3 ，且 $I_1 < I_2 < I_3$ ，如圖 3 所示。 $\hat{e}_3$ 與頁面垂直且朝外。本題考慮蝶形螺絲在無重力狀態下的運動，所以可以設定質心為靜止，並且所考慮的轉動速率並非在高速的範疇，因此空氣對轉動的影響可以忽略。蝶形螺絲在某瞬間的角速度 $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$ 時， $\vec{\omega}$ 對角動量 $\vec{L}$ 的量值平方 $|\vec{L}|^2$ 和轉動動能 E 的貢獻皆以 ω_i^2 的形式出現，此處 $i =$

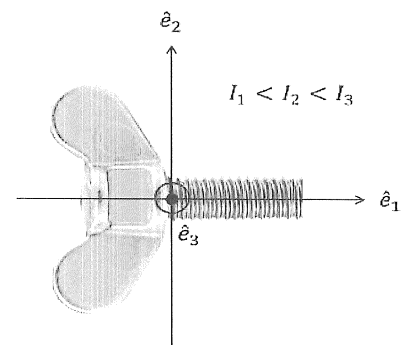


圖 3

1, 2, 3。 ω_i 之間互相影響，使 ω_i 與 $\hat{e}_i$ 皆隨時間改變。

(a) (i) 試寫出 L^2 的表達式，以 I_i 與 ω_i 表示之。

(ii) 試寫出 E 的表達式，以 I_i 與 ω_i 表示之。

(b) (i) 試推導 $\frac{d\hat{e}_1}{dt}$ ，以 ω_i 與 $\hat{e}_i$ 表示之。

(ii) 試依 $\frac{d\hat{e}_1}{dt}$ 的結果寫出 $\frac{d\hat{e}_2}{dt}$ 與 $\frac{d\hat{e}_3}{dt}$ ，以 ω_i 與 $\hat{e}_i$ 表示之。

(c) 考慮角速度 $\vec{\omega}(t)$ 、角動量 $\vec{L}(t) = \sum_{i=1}^3 L_i(t) \hat{e}_i(t)$ 與慣量主軸的方向 $\hat{e}_i(t)$ 皆隨時間 t 改變，且在沒有外力作用於蝶形螺絲的情況下，

試推導出 dL_i/dt 為以下形式

$$\frac{dL_1}{dt} = A_1 \omega_2 \omega_3, \quad \frac{dL_2}{dt} = A_2 \omega_1 \omega_3, \quad \frac{dL_3}{dt} = A_3 \omega_1 \omega_2;$$

並求出係數 A_i 的表達式。

(d) 此小題至(f)小題考慮蝶形螺絲的轉動動能 E 很接近 $L^2/(2I_1)$ 的情況，

$$\text{即 } E = \frac{L^2}{2I_1} - \Delta E, \text{ 且 } 0 < \Delta E \ll L^2/(2I_1)。$$

試求出 ω_2 與 ω_3 的關係式，以 I_i 與 ΔE 表示之。

(e) 試在(d)的條件下求 $\omega_i(t)$ 。

已知在 $t = 0$ 時， $\omega_1(0) = \omega_0$ ， $\omega_2(0) = \omega_2^0$ ，與 $\omega_3(0) = 0$ ；其中 $0 < \omega_2^0 \ll \omega_0$ 。

另外 $\hat{e}_1(0) = \hat{z}$ ， $\hat{e}_2(0) = \hat{x}$ ，與 $\hat{e}_3(0) = \hat{y}$ 。求 $\omega_i(t)$ 並保留到 ω_2^0 的一階貢獻。

(f) (i) 試在(d)的條件下求 $\hat{e}_i^0(t)$ ，也就是 $\hat{e}_i(t)$ 的零階 ω_2^0 的結果。

(ii) 試求 $\hat{e}_1(t)$ 在一階 ω_2^0 貢獻的 $d\hat{e}_1^1(t)/dt$ ，(注意：只求 $i = 1$ 的結果)，並指出 $\hat{e}_1^1(t)$ 的頻率以及在實驗室座標上的方向。

(g) 此小題至(i)小題考慮蝶形螺絲的轉動動能 $E = \frac{L^2}{2I_2}$ 的情形。

試求 ω_1 與 ω_3 的表達式，以 I_i 、 E 與 ω_2 表示之。

(h) 試在(g)的條件下推導出 $\dot{\omega}_2(t)$ ，並求出 $\omega_2(t)$ 。

已知在 $t = 0$ 時， $\omega_2(0) = 0$ ，且 $\omega_1(0) > 0$ 與 $\omega_3(0) > 0$ 。

另外 $\hat{e}_1(0) = \hat{z}$ ， $\hat{e}_2(0) = \hat{x}$ ，與 $\hat{e}_3(0) = \hat{y}$ 。

(i) 若在(h)中的 $\omega_1(0)$ 改為 $\omega_1(0) < 0$ 時，試求出 $\omega_2(t)$ 。

三、兩非等溫腔室之連通管內的氣體壓力分布

A 部分

a 質量流

- (a) 如圖 4，一半徑為 a 的狹長圓筒，其水平縱軸沿 x 方向。在等溫下，當圓筒兩端的氣體壓力 p_1 與 p_2 固定，且筒內黏滯係數為 η 的氣體流動達到穩定態時，若在筒內 x 處的橫截面，其氣體的質量密度為 ρ ，壓力為 p ，壓力梯度為 dp/dx ，則通過圓筒的質量流 $\dot{M}$ (即每單位時間通過的質量)為何？

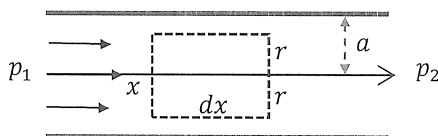


圖 4

B 部分 氣體動力論

考慮容積為 V 的容器內處於熱力學平衡的氣體，其中每個分子可視為極微小的圓球，所有分子圓球的總面積為 S 。假設 S 遠大於容器壁的面積 S' ，以致每個分子可視為只與表面積為 S 之表面發生彈性碰撞(即與器壁的碰撞可忽略)。依據氣體動力論，回答下列問題。

b 平均自由徑

- (b) 只考慮容器中速率為 u 的氣體分子所發生的碰撞時，一個速率為 u 的氣體分子 i 與表面 S 的平均碰撞頻率(即每單位時間的平均碰撞次數) $\beta_u = \alpha u S / V$ ，試求出 α 。速率為 u 的氣體分子之平均自由徑 λ 為何？

c 與器壁的碰撞頻率

- (c) 考慮容器中所有速率的氣體分子(速率不限為 u)與器壁表面 S' 發生的碰撞。若所有氣體分子的平均速率為 $\bar{u}$ ，平均分子數密度為 n ，則器壁表面 S' 上每單位時間每單位面積到達(即與器壁發生碰撞)的分子數 ψ 為何？

d 自由徑出發點的平均高度

- (d) (參看圖 5) 如同(b)部分，只考慮速率為 u 之氣體分子。若其平均自由徑為 λ ，則一個速率為 u 之氣體分子穿過一假想平面 A 之前，其最後發生碰撞處到平面 A 之垂直距離的平均值 $\bar{z} = \gamma \lambda$ 。試求 γ 。

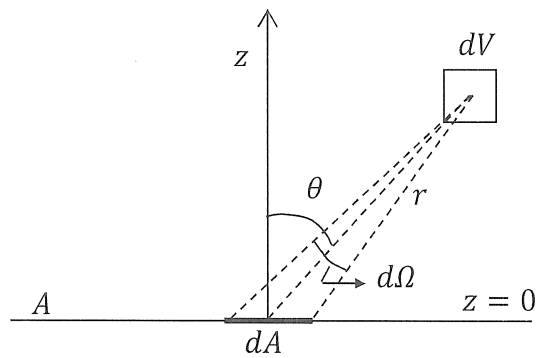


圖 5

e 黏滯係數

(e) 沿水平方向(x 軸)流動的穩流，其流速 $u(z)$ 沿垂直方向(z 軸)的梯度若為 dv/dz ，則流體中面積為 A 的任意一水平面所受到的切向力 F_x 可表示為 $F_x/A = \eta dv/dz$ ，其中的比例常數稱為該流體的黏滯係數。

若每個氣體分子的質量為 m ，所有分子的平均速率為 $\bar{u}$ ，分子數密度為 n ，試求氣體的 η 。

C 部分

如圖 6，絕對溫度固定為 T_1 與 T_2 的兩個氣體腔室($T_1 < T_2$)，以半徑為 a 、沿水平 x 方向的狹長圓筒連通，圓筒兩端分別位於 $x = 0$ 與 $x = L$ ，筒壁的溫度梯度為 dT/dx 。令 m 代表單個氣體分子的質量， η 代表氣體的黏滯係數。已知氣體分子的方均根速率 U 、平均速率 $\bar{u}$ 、平均分子數密度 n 與壓力 p 的關係為

$$p = \frac{mnU^2}{3} = \frac{\pi mn\bar{u}^2}{8}$$

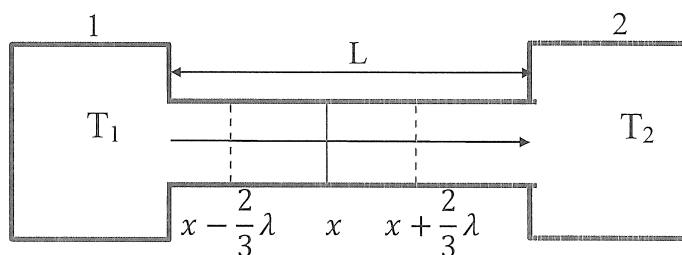


圖 6

f 通過圓筒的質量流

(f) 若在筒內 x 處的橫截面，氣體的分子數密度為 n ，壓力為 p ，壓力梯度為 dp/dx ，則依據氣體動力論，試證明在溫度梯度的驅動下，圓筒內每單位時間每單位面積沿 $+x$ 方向通過 x 處橫截面的氣體質量 J_m (即氣體質量流密度)為

$$J_m = -\frac{mn\bar{u}\lambda}{3} \left(\frac{1}{\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)$$

(註：因熱運動而到達 x 處橫截面的氣體分子，可近似為是來自 $x \pm 2\lambda/3$)

g 壓力隨溫度的變化

(g) 依據(a)題，在壓力差的驅動下，會有與(f)題之 J_m 方向相反的質量流。當筒內的淨質量流為零時，證明筒內氣體壓力 p 對溫度的梯度(即 dp/dT)為

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{2T \left(\frac{1}{p} + \frac{\rho a^2}{8\eta^2} \right)}$$

上式中 ρ 與 η 分別為在 x 處的氣體質量密度與黏滯係數。

2024年亞洲及國際物理奧林匹亞競賽

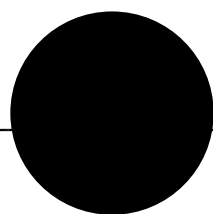
國家代表隊決選研習營

實驗模擬(一)試題

2024 年 4 月 1 日

實驗(一)和(二)時間:共 300 分鐘

姓名: _____



【注意事項】

- 一、 實驗試題(一)和(二)總分 150 分。
- 二、 考試時間共五小時。
- 三、 限以藍色或黑色原子筆作答。
- 四、 在指定的“正面”答案卷上作答。
- 五、 如有任何問題，請舉手並告知監考人員。
- 六、 可使用無程式掌上型計算機。

Q1-1

I 實驗一簡介:

本實驗是將玻璃試管裝一些熱水，測量試管中熱水降溫的過程，求得玻璃試管的熱傳導係數 κ 。

玻璃試管的幾何參數，包含其外徑 d_{out} 、內徑 d_{in} 、側壁高 H ，如圖 1 中所標示。假設試管有均勻的厚度 $\delta = (d_{out} - d_{in})/2$ ，平均半徑為 R ，且下緣弧面近似為半徑 R 的半圓面，則玻璃的總體積約為

$$V_{\text{glass}} = 2\pi RH\delta + 2\pi R^2\delta。$$

當倒入一些熱水到試管中時，側壁部分的水高為 h 。當熱水溫度為 T_h ，試管外部溫度為 T_c ，單位時間穿過玻璃試管的熱能為

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa A \frac{\Delta T}{\delta} + P_0 \quad (1)$$

其中， $\Delta Q = ms\Delta T_h$ 為某一變化時間 Δt 之內試管中熱水流出的熱能， m 為熱水的質量， $s = 4.20 \text{ Jg}^{-1}\text{K}^{-1}$ 為水的比熱， κ 為試管玻璃的熱傳導係數， $\Delta T = T_h -$

T_c 為玻璃兩側的溫差， A 為玻璃傳熱的面積， P_0 為其他因素流失的熱功率。若 P_0 也與溫差 ΔT 成正比： $P_0 = \alpha\Delta T$ ，則(1)式可以改寫為

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa(2\pi Rh + 2\pi R^2) \frac{\Delta T}{\delta} + \alpha\Delta T = \beta \Delta T \quad (2)$$

其中 $\beta = \frac{2\pi R\kappa}{\delta}(h + R) + \alpha$ 為散熱功率與溫差之間的比例。在本實驗中定義 β 為總散熱係數。當試管注入不同高度的熱水時，測量熱水溫度 T_h 及試管外部溫度 T_c 隨時間 t 的變化，計算出 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 並對 ΔT 作圖，由關係圖的擬合線斜率得到 β ，並由 β 與 h 之間的關係求得熱傳導係數 κ 的數值。

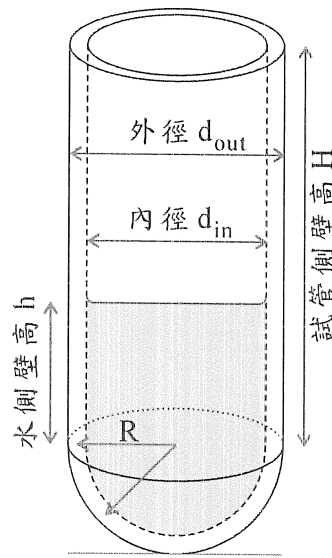


圖 1：試管幾何形狀

Q1-2

II 實驗一 器材：

器材名稱	規格、數量	器材名稱	規格、數量
玻璃試管	1 支	計時器	1 個
試管架 (開孔木板)	1 組	游標尺	1 支(精度 0.02mm)
水杯	500 ml，2 個、 1000 ml，1 個	熱水瓶 (含熱水)	1 個 已裝熱水，請小心避免 燙傷，可再自取熱水
電子秤	1 個	冷水	水杯中之冷水，可再自 取、更換
攪拌型溫度計	電子式，2 支	隨意貼黏土	些許
刻度滴管	2 支	白紙	數張

注意：若玻璃試管因故破損，可換取 1 支(不扣分)，之後若再索取，每支扣 5 分。

可到指定處排隊取用熱水，小心避免燙傷。

如何節約熱水消耗及排隊時間亦屬實驗能力，應自行斟酌。



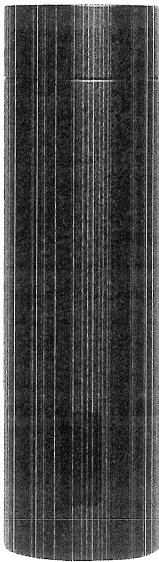
水杯



試管架



溫度計



熱水瓶

圖 2: 水杯、試管架、溫度計和熱水瓶等部分實驗器材。

Q1-3

III 實驗一：

QA1. 測量玻璃試管的尺寸

A1.	以游標尺測量並紀錄玻璃試管的外徑 d_{out} 、內徑 d_{in} 、側壁高 H 。(需要考慮不準度)	8 pt
A2.	由 A1 的數據，計算出試管側壁的平均半徑 R 、管壁平均厚度 δ 、玻璃總體積 V_{glass} 。(需要考慮不準度，由誤差傳遞求得誤差)	6 pt
A3.	秤量並紀錄玻璃試管質量 M_{glass} 。(需要考慮不準度) 由 M_{glass} 及 A2 所得的 V_{glass} ，計算出玻璃密度 D_{glass} 。(需要考慮不準度，由誤差傳遞求得誤差)	6 pt

QA2. 熱水的散熱功率

A4.	將玻璃試管插入試管架(木板)，並橫跨在水杯上放置妥當。在玻璃試管中小心倒入適量的熱水，測量熱水質量 m 並紀錄。 在另一水杯加入適量的冷水，將裝有熱水的試管(及試管架)放到裝冷水的水杯上並放置妥當，紀錄試管內的熱水溫度 T_h 及試管外的冷水溫度 T_c 隨時間 t 的變化。	8 pt
A5.	由 A4 的數據，計算出各變化時間 Δt 的熱水熱能流出功率 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ ，與玻璃兩側的溫差 $\Delta T = T_h - T_c$ 。將 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 和 ΔT 彙整於數據表。將兩者作圖，得到擬合線方程式，寫下總散熱係數 β 值。記錄此時側壁水高 h 。	12 pt
A6.	重複上述步驟，再測量至少 3 個不同側壁水高 h 時的降溫數據，彙整成數據表。繪製 $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ 對 ΔT 的關係圖(將數據整合並繪製在上一頁的方格紙中)。求出各別高度 h 的總散熱係數 β 值。	20 pt

QA3. 不同水量的散熱功率與玻璃的熱傳導係數

A7.	將 QA2 所得的總散熱係數 β 值對側壁水高 h 作圖，並畫出擬合線，寫下擬合線的方程式。由擬合結果計算出試管玻璃的熱傳導係數 κ 。(需要考慮不準度)	10 pt
-----	--	-------

2024年亞洲及國際物理奧林匹亞競賽

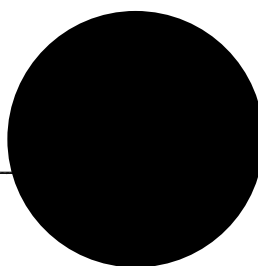
國家代表隊決選研習營

實驗模擬(二)試題

2024 年 4 月 1 日

實驗(一)和(二)時間:共 300 分鐘

姓名:_____



【注意事項】

- 一、實驗試題(一)和(二)總分 150 分。
- 二、考試時間共五小時。
- 三、限以藍色或黑色原子筆作答。
- 四、在指定的“正面”答案卷上作答。
- 五、如有任何問題，請舉手並告知監考人員。
- 六、可使用無程式掌上型計算機。

Q2-1

I 實驗二簡介:

本實驗有兩部分，一是測量熱敏電阻(半導體性)的電阻隨溫度變化，而得到其能隙數值，二是將燈泡裡的鎢絲(金屬性)通電加熱，觀察不同電功率時鎢絲的電阻，可推算得其溫度與電功率的關係，進一步求出鎢絲的發熱面積。

◆半導體

半導體的電阻可以用下式描述：

$$R = R_0 e^{E/k_B T} \quad (1)$$

其中， $k_B \approx 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 為波茲曼常數， T 為絕對溫度(單位: K)， E 為半導體能隙(單位: 焦耳 J)， R_0 為一常數(單位: 歐姆 Ω)。

對(1)式左右取自然對數，可得

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{E}{k_B} \frac{1}{T} \quad (2)$$

因此將 $\ln R$ 對溫度倒數 $\frac{1}{T}$ 作圖，其斜率為 E/k_B ，可由此得到半導體能隙 E 。習慣上，我們常用電子伏特(eV)作為能隙的單位， $1 \text{ eV} \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ 。

◆金屬

電子在金屬中通常容易自由移動，因而電阻率較小。對一個長度為 L ，截面積為 A_{Cross} ，電阻率為 ρ 的導體，其電阻 R 為

$$R = \rho \frac{L}{A_{\text{Cross}}} \quad (3)$$

以鎢為例，鎢在室溫時的電阻率 $\rho \approx 5.60 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ 。

當溫度增加時，電子與原子之間的碰撞機率增加，使得電阻隨溫度上升。其關係常可描述為

$$R = R_1 (1 + \alpha (T - T_1)) \quad (4)$$

其中， R_1 為溫度 T_1 時的電阻值， α 為電阻溫度係數。以鎢為例 $\alpha \approx 5.0 \times 10^{-3}$ 。

Q2-2

◆熱輻射

一高溫物體會產生熱輻射(thermal radiation)，將熱能以電磁波(光)的形式傳送出去。一物體的熱輻射功率 P_{rad} 可表示為

$$P_{rad} = \varepsilon \sigma A T^4 \quad (5)$$

其中， ε 為發射率(介於 0~1)， $\sigma \approx 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ 為史蒂芬-波茲曼常數， A 為物體表面積， T 為物體溫度(單位: K)。

若考慮物體也會從環境吸收熱輻射，當環境溫度(例如室溫)為 T_2 時，式(5)可修改為

$$P_{rad} = \varepsilon \sigma A (T^4 - T_2^4) \quad (6)$$

以本實驗所使用的鎢絲燈泡為例，通電而產生高溫的鎢絲除了將電功率 P 以輻射的形式放出熱輻射功率 P_{rad} 之外，部分熱能也可透過熱傳導(thermal conduction)的形式傳出燈泡。熱傳導功率 P_{cond} 可表示為

$$P_{cond} = \kappa a \frac{T - T_3}{\delta} \quad (7)$$

κ 為連接高溫鎢絲的金屬支架的熱傳導係數， a 為金屬支架的截面積， δ 為金屬支架的長度， T_3 為金屬支架另一端的溫度。假設這些特性都不隨鎢絲溫度 T 變化，且 T_3 大約與環境溫度 T_2 相同。則電阻消耗的電功率 P 與熱輻射功率 P_{rad} 、熱傳導功率 P_{cond} 的關係可寫為

$$P = P_{rad} + P_{cond} = \varepsilon \sigma A (T^4 - T_2^4) + \frac{\kappa a}{\delta} (T - T_2) \quad (8)$$

(8)式可改寫為

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon \sigma A (T^2 + T_2^2)(T^2 - T_2^2) + \frac{\kappa a}{\delta} (T - T_2) \\ &= \left[\varepsilon \sigma A (T^2 + T_2^2)(T + T_2) + \frac{\kappa a}{\delta} \right] (T - T_2) \end{aligned} \quad (9)$$

將(9)式左右同除以 $(T - T_2)$ ，可得

$$\left[\frac{P}{T - T_2} \right] = \varepsilon \sigma A [(T^2 + T_2^2)(T + T_2)] + \frac{\kappa a}{\delta} \quad (10)$$

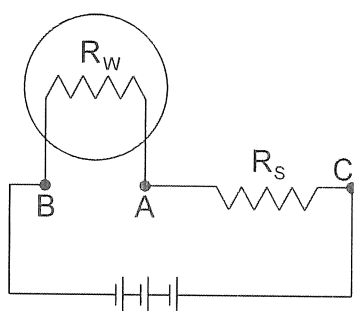
因此，若以 $\left[\frac{P}{T - T_2} \right]$ 為 y 軸， $[(T^2 + T_2^2)(T + T_2)]$ 為 x 軸作圖，其斜率為 $\varepsilon \sigma A$ ，截距為 $\frac{\kappa a}{\delta}$ 。假設發射率 $\varepsilon = 1$ ，可由斜率推算出鎢絲的熱輻射面積 A 。

Q2-3

◆熱輻射實驗電路

在室溫下用電表測量鎢絲燈泡電阻(R_W)及串聯電阻(R_S)。

將電池(可多個串聯)、電阻(R_S ，可多個串、並聯)及鎢絲燈泡串聯成一個迴路，示意圖如下圖。



圖一、熱輻射實驗電路示意圖。

假設電阻 R_S 與所通過的電流大小無關，則透過電表測量 A、C 兩點的電壓差 V_{AC} ，及歐姆定律 $V_{AC} = IR_S$ ，可得電流 $I = V_{AC}/R_S$ 。透過電表測量 A、B 兩點的電壓差 V_{AB} ，可得 $V_{AB} = IR_W$ ，因此鎢絲燈泡電阻

$$R_W = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{V_{AB}}{V_{AC}} R_S \quad (11)$$

此方法可測得通電迴路中發熱的鎢絲燈泡電阻，並由式(4)得到其溫度。

注意：不可以在通電迴路中直接使用電表的「歐姆檔」測量鎢絲燈泡電阻，以免損壞電表。

Q2-4

II 實驗二器材：

器材名稱	規格、數量	器材名稱	規格、數量
玻璃試管	1 支	三用電表	1 組，含紅、黑探針接線
試管架 (開孔木板)	1 組	鎢絲燈泡	1 個
水杯	500 ml，1 個	燈泡底座	1 個
攪拌型溫度計	電子式，1 支	3 號電池	4 個
熱敏電阻	1 個	3 號電池盒	含鱷魚夾接線，4 個
鱷魚夾-杜邦線	可連接熱敏電阻， 2 條	一般電阻	約 1 歐姆，4 個
雙邊鱷魚夾接線	紅色、黑色，共 2 條	小麵包板	1 個
冷水	水杯中之冷水，可再自 取、更換	隨意貼黏土	些許
熱水瓶 (含熱水)	1 個 已裝熱水，請小心避免 燙傷，可再自取熱水	白紙	數張
刻度滴管	2 支		

注意：上表器材部分與 實驗一 相同，故不再另外提供。

可到指定處排隊取用熱水，小心避免燙傷。

若鎢絲燈泡燒毀，可換取 1 個(不扣分)，之後若再索取，每個扣 5 分。

電池在正常使用下(不短路耗電時)足以完成本實驗，如何避免無謂電量消耗亦屬實驗能力。

若電量耗盡可索取 1 個新電池(不扣分)，之後若再索取，每個扣 5 分。

III 實驗二

QB1. 熱敏電阻的能隙

B1.	將熱敏電阻與電子溫度計插入熱水中，使兩者有相同溫度。以電子溫度計測量熱水的溫度 T ，以電表測量熱敏電阻的電阻值 R 。 列表呈現不同水溫 T 測得的電阻值 R ，至少 10 個數據點，溫度數據橫跨大於 30°C 溫差。	5 pt
-----	---	------

B2.	以 B1 中各組數據計算 $\ln R$ 值與 $1/T$ 值。(可併於 B1 的自製表格中) 以 $\ln R$ 為 y 軸， $1/T$ 為 x 軸作圖。	5 pt
-----	--	------

Q2-5

B3.	在 B2 所得的 $\ln R$ 對 $1/T$ 關係圖中畫出擬合線，寫下擬合線方程式。由斜率值及(2)式求得此一熱敏電阻的能隙值 E 。以 eV 為單位。	5 pt
-----	--	------

QB2. 燈絲的溫度

B4.	以電表測量鎢絲燈泡在室溫不通電時的電阻值 $R_W(T_1)$ 。(考慮不準度) 先選一個 3 號電池及 1 個一般電阻，預備連接熱輻射實驗電路(如圖一)。在不通電時，測量接點 A 和接點 C 之間的電阻(R_S)。(考慮不準度) 測量室溫溫度 T_1 。(以 K 為單位) 紀錄 T_1 、 $R_W(T_1)$ 、 R_S 。	5 pt
-----	--	------

B5.	連接熱輻射實驗電路，待燈泡溫度上升，以電表測接點 A 和接點 C 兩點之間的電壓差 V_{AC} ，以及接點 A 和接點 B 兩點之間的電壓差 V_{AB} 。紀錄 V_{AC} 、 V_{AB} ，推算出此發熱鎢絲燈泡的電阻值 R_W 。	5 pt
-----	--	------

B6.	由 B5 所得的鎢絲電阻 R_W 及(4)式所述的關係，求得發熱鎢絲燈泡的溫度 T 。(以 K 為單位) 由功率 $P = \frac{V_{AB}^2}{R_W}$ 求得鎢絲電阻損耗的電功率。	5 pt
-----	--	------

QB3. 燈絲的溫度變化

B7.	以前面 QB2 的方法，使用一個 3 號電池但串聯多個一般電阻改變 R_S 。(透過麵包板連接電阻時，要確認是否連接良好) 用至少 3 種不同的串聯電阻 R_S 進行實驗，紀錄各 R_S 時的 V_{AC} 、 V_{AB} ，推算出鎢絲電阻 R_W 、鎢絲溫度 T 、損耗電功率 P 。	10 pt
-----	---	-------

B8.	改使用 2 個電池(串聯)，用至少 3 種不同的串聯電阻 R_S 進行實驗，紀錄各 R_S 時的 V_{AC} 、 V_{AB} ，推算出鎢絲電阻 R_W 、鎢絲溫度 T 、損耗電功率 P 。	10 pt
-----	--	-------

B9.	改使用 3 個電池(串聯)，用至少 3 種不同的串聯電阻 R_S 進行實驗，紀錄各 R_S 時的 V_{AC} 、 V_{AB} ，推算出鎢絲電阻 R_W 、鎢絲溫度 T 、損耗電功率 P 。	10 pt
-----	--	-------

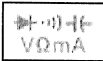
B10.	改使用 4 個電池(串聯)，用至少 3 種不同的串聯電阻 R_S 進行實驗，紀錄各 R_S 時的 V_{AC} 、 V_{AB} ，推算出鎢絲電阻 R_W 、鎢絲溫度 T 、損耗電功率 P 。	10 pt
------	--	-------

Q2-6

QB4. 散熱功率與溫度的關係

B11.	彙整 QB3 中得到各條件下鎢絲損耗的電功率 P 及其溫度 T ，計算出 $\left[\frac{P}{T-T_2}\right]$ 與 $[(T^2 + T_2^2)(T + T_2)]$ ，將結果列表呈現。 以 $\left[\frac{P}{T-T_2}\right]$ 的數值為 y 軸， $[(T^2 + T_2^2)(T + T_2)]$ 的數值為 x 軸作圖，畫出線性擬合線，寫下擬合線方程式。 假設發射率 $\varepsilon = 1$ ，求得鎢絲的熱輻射面積 A 。	10 pt
------	---	-------

◆電表

此實驗使用的電表如右圖所示，紅色探針接線與  接孔連接，黑色探針接線與 COM 接孔連接。

當進行電阻測量時，旋鈕的檔位轉到適當範圍的**歐姆(Ω)**檔位置。

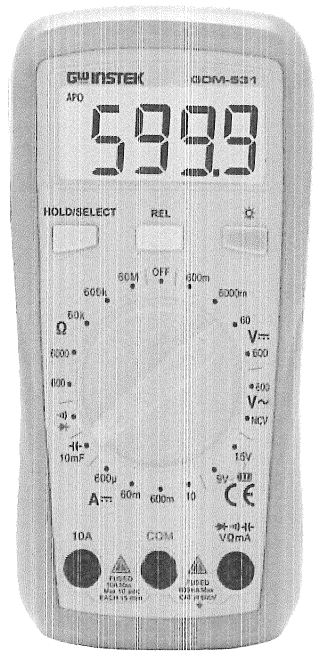
注意：當待測電阻與其他電路連接，且有通電時，不可直接使用歐姆檔測量其電阻，以免損壞電表。

當進行電壓測量時，轉到適當範圍的**伏特(V)**檔位置。

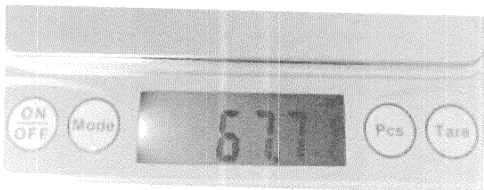
當進行電流測量時，轉到適當範圍的**安培(A)**檔位置。若待測電流超過 600 mA，則紅色探針接線要改插到 10A 接孔，並切到 10 安培的檔位，以免損壞電表。

若按黃色鍵(HOLD)，可使顯示畫面暫停。

測量結束後，要將旋鈕旋至 OFF 檔位。



◆電子秤



Mode 按鍵可切換單位。Tare 按鍵可歸零。

◆熱敏電阻 連接 鱷魚夾-杜邦線

