

2010年第11屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第41屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2010年2月6日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 3、可使用無程式之掌上型計算器。

2010年第11屆亞洲物理及第41屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

1. 雙質點系統在保守力場中的運動

兩質點的質量分別為 m_1 和 m_2 ，兩者之間的交互作用力為保守力，其對應的位能可以寫成 $U(r) = ar^2 - 2br + c$ ，式中 r 為兩質點之間的徑向距離， a, b, c 均為正值。設 $m_1 = m$ ， $m_2 = 2m$ ，回答下列問題：

- (a) 若無其他外力的作用，則在靜平衡時，兩質點之間的距離 r_0 為何（以 a, b, c 表示之）？
- (b) 若無其他外力的作用，則在該兩質點系統的質心參考坐標系中，兩質點可能作簡諧運動，其角頻率 ω_0 為何（以 a, b, c, m 表示之）？
- (c) 現將兩質點置於一均勻的地球重力場中， $\vec{g} = -g\hat{z}$ ，此處 g 為地球表面的重力加速度。起始時，質點 m_1 固定不動，其所在的位置取作為參考坐標系的原點，這時質點 m_2 亦靜止在新的平衡點上。設 $b = 5mg$ ，則質點 m_2 在 z 軸的坐標為何（以 r_0 表示之）？
- (d) 承(c)題，若在 $t=0$ 時，將質點 m_1 由原點處自靜止開始自由釋放，則當該兩質點系統的質心，自其初始位置算起，下落距離為 $30 r_0$ 時， m_1 的坐標（以 r_0 表示之）和速度（以 r_0, ω_0 表示之）各為何？
- (e) 承(c)題，若在 $t=0$ 時，將質點 m_1 釋放的瞬間，沿 $+x$ 軸方向，給予 m_1 一個衝量 P ，則欲使兩質點在其系統質心參考坐標系中的運動，為單純的等速圓周運動， P 值應為何（以 m, r_0, ω_0 表示之）？

2. 圓筒在軟平面上的滾動摩擦係數

理想的圓筒在非光滑的水平面上純滾動時，此時因為接觸點的速度為零，雖然圓筒和平面之間可以有摩擦力的作用，但摩擦力不作功，故圓筒的質心得以作等速度運動。然而實際的經驗卻告訴我們，圓筒遲早會停止運動而靜止，這個事實說明了有所謂滾動摩擦的存在。造成滾動摩擦有很多原因，如表面分子對圓筒的黏著力、表面與圓筒之間的靜電作用力等都會造成滾動摩擦，但在這些原因中，有些是與表面和圓筒之間的交互作用力無關，其中最重要的一項，是由於實際的圓筒或平面都不是理想的剛體，必然有形變產生。因此若圓筒施加於平面上的正向力為 N 時，則圓筒受到一對應的摩擦力矩 $\tau = \mu_r N$ ，使得圓筒的速度變慢，終至停止運動而靜止，式中的 μ_r 稱為滾動摩擦係數（單位為長度）。

真實的圓筒在平面上滾動時，兩者都有某種程度的形變，形變的程度與它們的相對硬度有關。在本題中，我們考慮一硬度大的圓筒在軟平面上的滾動，由於圓筒的硬度甚

大於平面的硬度，在滾動中，圓筒的橫切面保持圓形，而與圓筒接觸的平面部分則產生形變，如圖 1(a) 所示，圖中 x_c 為圓筒中心軸 C 的 x 坐標； v 為圓筒中心軸的移動速度，沿 $+x$ 方向； h 代表圓筒中心軸因平面形變而致下降的位移； x_1 和 x_2 分別為圓筒與平面恰接觸前後兩點的 x 坐標；P 點為圓筒下方和平面之間的某一接觸點，在 x - y 平面上的坐標為 (x, y) ，其因形變而下降的位移為 $y(x, t)$ （取向上為正，向下為負）。

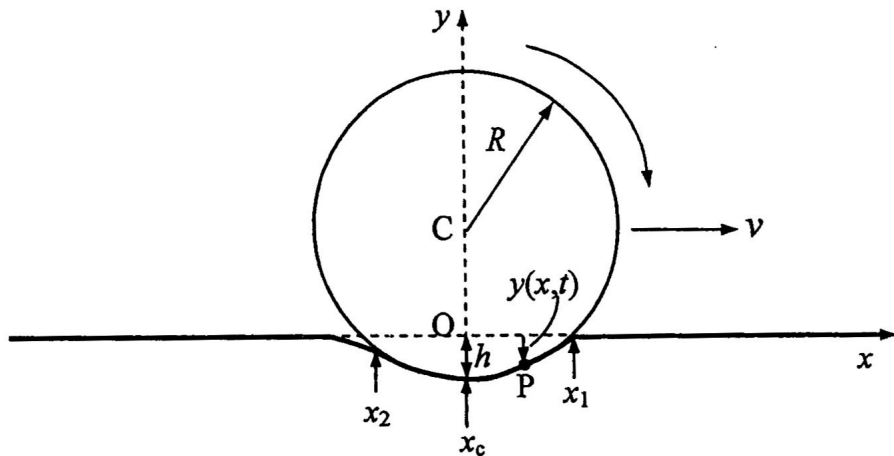


圖 1(a)

我們將假設平面的變形可由繫有質點的垂直彈簧來模擬，並忽略彈簧側向的耦合，如圖 1(b) 所示。這些繫有質點的垂直彈簧是密集的，故其性質以密度表示，其中沿 x 軸每單位長度所含質點的質量為 λ 、彈簧每單位長度的力常數為 k ，且每單位長度內質點所受的外力為 $f(x, t)$ 。質點只在 y 方向上運動，運動時所受的阻力與其速度成正比，即若質點的位移為 $y(x, t)$ ，則每單位長度所受的阻力為 $-by(x, t)$ ，式中 b 稱為每單位長度的阻尼係數。在本問題中，假設平面的形變速率很小，因此可以假設彈簧在圓筒經過時不作振盪，使得圓筒在平面上滾動時，不會在平面內部產生聲波。

設圓筒的長度為 L 、質量為 M 、重力加速度為 g ，並假設模擬平面變形的彈簧運動時，

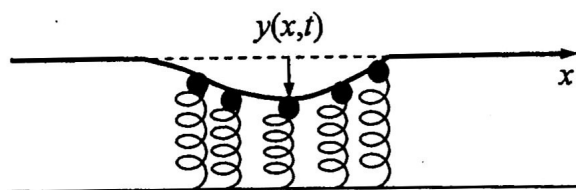


圖 1(b)

質點所受的重力可忽略不計。當圓筒以等速 v 做純滾動時，圓筒與平面間的切線力可被忽略，且彈簧上質點與接觸點沒有 y 方向之相對速度，設 $R \gg (x_1 - x_2)$ ，回答下列問題：

【註】：(i) 若 $R \gg x$ ，則 $\sqrt{R^2 - x^2} \approx R - \frac{x^2}{2R}$

(ii) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{常數}$

(a) 證明平面上接觸點 $P(x, y)$ 因形變而下降的位移，可寫成近似式： $y(x, t) \approx \frac{(x - x_c)^2}{2R} - h$ ，

式中 $x_2 \leq x \leq x_1$ ， $|y| \leq h$ 。

(b) 求在圓筒下方每單位長度的接觸平面所受的力 $f(x, t)$ ，並由此分別求出 x_1 和 x_2 （以 $R, x, x_c, v, k, h, \lambda, b$ 表示之）。

(c) 在(b)題中所求得的力密度，為已在圓筒下方的接觸平面所受之力。當圓筒向前滾動時，平面上的質點不斷的由原先的靜止態，經圓筒瞬間施力而到達圓筒之下。試求每單位長度平面經圓筒瞬間施力，而到達圓筒之下所受的力（以 $R, x_1, x_2, x_c, v, \lambda$ 表示之）。

(d) 試求 h 值，精確至 v^0 （以 M, R, k 和 λ 表示之）。

(e) 試由圓筒能量的損失，求出滾動摩擦係數 μ_r ，精確至 v^0 （以 M, R, k 和 b 表示之）。

(f) 設 $t = 0$ 時， $v = v_0$ ，導出 $v(t)$ 的近似式。

3. 磁跳圈

圖 2 所示為一鉛直豎立的圓柱形磁鐵的磁場分布情形，成圓柱形對稱。任一點的磁場強度可寫為 $\vec{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z} = (aB_0 r) \hat{r} + B_0(1 - bz) \hat{z}$ ，式中 $\hat{r}$ 為 $x-y$ 平面上沿徑向的單位向量； $\hat{z}$ 為平行於 z 軸的單位向量； a, b 和 B_0 皆為常數。起始時，有一質量為 m 、半徑為 r_0 的細銅環，靜置於 $z = 0$ 的水平面上，圓環的中心軸和圓柱形磁鐵的中心軸疊合。假設銅環為完美的導體，即其電阻為零，當該銅環自靜止開始釋放，沿其中心軸的方向，自由落下時，環中的電流為零。設銅環的自感為 L ，求：

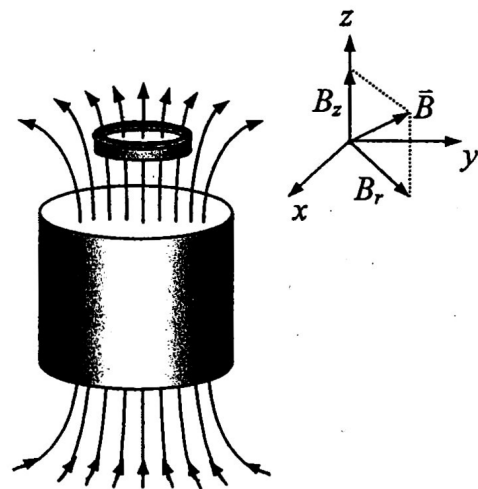


圖 2

(a) 銅環的運動方程式；

(b) 銅環的運動軌跡方程式；

(c) 銅環內的電流 I 和時間 t 的函數關係式 $I(t)$ 。

【註】：若一線圈的自感為 L ，當流經線圈的電流 I 隨時間 t 變動時，則通過該線圈內的磁通量 $\phi_{induced}$ 亦隨之變動，因此線圈內的感應電動勢 $\varepsilon_{induced}$ ，可寫為

$$\varepsilon_{induced} = -\frac{d\phi_{induced}}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \phi_{induced} = LI$$

4. 氣體分子的電偶

考慮一密度為 ρ 的均勻氣體，其電容率為 $\epsilon = \kappa \epsilon_0$ (κ 為介電常數， ϵ_0 為真空的電容率)；此氣體的分子為電中性，每個分子的質量為 m 。

(a) 若於一平行板電容器的兩金屬極板中間，充滿此氣體，且正極板表面每單位面積的電荷為 σ ，則每個氣體分子的電偶極矩 μ 的平均值為何？

以下問題均不考慮平行板電容器的電場。

(b) 假設一個電量為 Q 的離子與此氣體的分子，均可視為質點。當一氣體分子與此離子之間的距離為 r 時，離子對此氣體分子的靜電作用力為何？

(c) 假設一個質量為 M 、電量為 Q 的離子與此氣體的分子，均可視為均勻圓球，離子具有氣體分子熱運動的平均動能，且電荷 Q 均勻分布於其球面上，氣體處於熱平衡狀態，其壓力為 P ，且適用理想氣體方程式。若離子在氣體中時，氣體分子可被吸引在其週遭，而成為由多個氣體分子與離子所形成的「集團」(或稱為集團離子)，則此離子與氣體分子的中心的最大距離 r_c 約為何？

(d) 已知空氣的介電常數 $\kappa = 1.0006$ ，空氣分子的直徑約為 $d = 3.3 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，在一大氣壓時，有一由空氣分子所形成的離子，其電量 $Q = e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，試利用(c)題的結果，說明此離子可否吸附其他中性空氣分子，而形成集團離子？

【註】： $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

5. 冰桶的儲冰時間

圖 3 所示為一用於儲存冰塊的圓筒形容器，以保麗龍製成，其內部空間的高度為 $h_0 = 30.0 \text{ cm}$ ，直徑為 $2r = 15.0 \text{ cm}$ ，筒壁厚度為 $d = 1.00 \text{ cm}$ 。圓筒的頂蓋封緊不透氣，底部插入一根細管作為排水用。起始時，圓筒內裝滿碎冰塊(在計算時，冰塊之間的空隙可忽略)。冰融化後的水，由底部的排水管排出筒外。已知下列的數據：

冰的熔化熱 $L_M = 0.330 \times 10^6 \text{ J/kg}$

水的汽化熱 $L_V = 2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}$

冰的密度 $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$

保麗龍的導熱係數 $\kappa = 0.0330 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$

當時的室溫為 $T = 25.0^\circ \text{C}$

假設冰塊表面的溫度為 0°C ；冰塊融化後，筒內的冰層高度下降，在冰層的上方會出現氣室，由於空氣的導熱係數很小，該氣室空間(含與氣室接觸的器壁部分和頂蓋)可視為絕熱，回答下列問題：

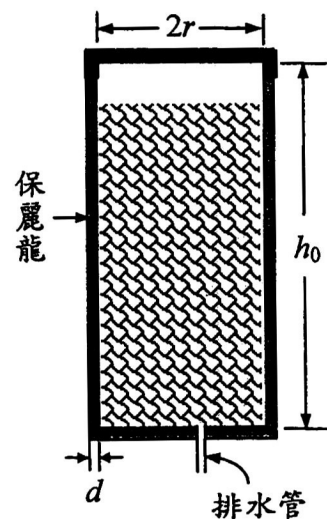


圖 3

- (a) 試求圓筒內熔剩的冰塊質量 M ，和時間 t 的函數關係式 $M(t)$ 為何？
 (b) 經多少小時後，圓筒內的冰塊質量將會減至起始的一半？
 (c) 冰塊除了熔化成水之外，也會直接從表面蒸發為水蒸汽。今在圓筒的頂蓋上插入

一根細管，作為排氣用，假設 $\dot{Q} (= \frac{dQ}{dt})$ 為每單位時間自外界經由傳導作用而流入

圓筒內部的熱量， $\dot{M} (= \frac{dM}{dt})$ 為筒內冰塊每單位時間所減少的質量， $\dot{M}_M$ 為冰塊經

由熔化的質量減少速率， $\dot{M}_V$ 為冰塊經由蒸發的質量減少速率，試證下式成立：

$$\dot{M} = \frac{\dot{Q} - \dot{M}_V L_V}{L_M}$$

【註】：水分子由冰的表面直接汽化的潛熱等於 L_M 和 L_V 之和。

- (d) 由(c)題的結果可知，若增加冰塊的蒸發速率，則 $\dot{M} (= \frac{dM}{dt})$ 變小，即可增加圓筒內

的儲冰時間。若 f 為冰塊經由蒸發所減少的質量佔全部減少質量的比值，即

$\dot{M}_V = f \dot{M}$ ，則欲使(b)題計算所得的時間增為 2 倍，則 f 值應為何？

【註】：你可能需要用到的公式：

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + \text{常數}$$

6. 偵測爆炸點的位置

有一爆炸物在某處地面爆炸。在離爆炸點遠處的某甲，先感到和地面平行的振動，繼之感到和地面垂直的振動，兩者之間的時間間隔為 2.5s；在不同地點的另一人某乙，也經歷同樣的情況，惟時間間隔為 5.0s。已知甲和乙之間的直線距離為 17.3km，縱向震波的速率為 4000m/s，橫向震波為 2000m/s，利用以上的數據，計算：

- (a) 爆炸地點和甲、乙兩人之間的距離各為何？
 (b) 爆炸地點和甲、乙兩人連線之間的夾角為何？