

2011年第12屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第42屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2011年2月19日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 3、可使用無程式之掌上型計算器。

2011年第12屆亞洲物理及第42屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

1. 彈道飛彈的飛行軌跡

如圖 1 所示，一個彈道飛彈從地面上 A 點向上方發射升空，在空中經一段飛行時間後，回落至地面上的另一地點 B。A 和 B 兩點對地球中心 O 點的張角為 θ ，而且射出時的初速度方向和回落至地面的末速度方向平行，但反向。若不計大氣阻力和地球自轉的影響， R 為地球的半徑，且飛彈在運動過程中，遵守克卜勒定律，回答下列問題：

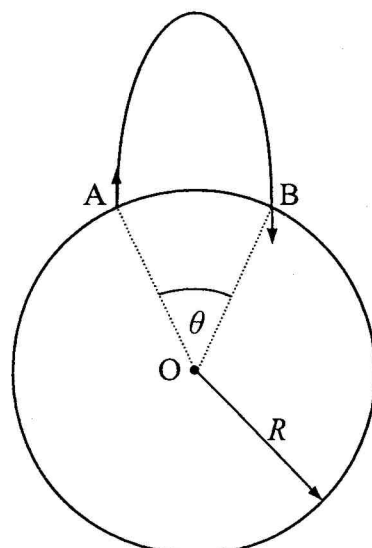


圖 1

- (a) 飛彈的軌跡為何種曲線？其焦點位在何處？
- (b) 若環繞地球的低空人造衛星（軌跡為圓形，其半徑可視為等於地球的半徑）運轉週期為 T_0 ，則飛彈自 A 點出發，回落至 B 點的飛行時間為何？以 T_0 和 θ 表示之。
- (c) 飛彈所到達的離地面的最大高度為何？
- (d) 現將飛彈在 A 點改沿水平方向發射，若不欲使飛彈

落至地面，則該飛彈發射初速的最小值為何？說明並畫出其完整的飛行軌跡。

【註 1】：彈道飛彈在起始發射時依靠火箭的推動，但在火箭的燃料燒盡之後，則僅受到地球引力的作用。本題所討論的飛彈飛行軌跡，係指飛彈在獲得初速後，在地球重力場中的運動軌跡，不考慮在初期受火箭推動時的運動過程。

【註 2】：橢圓的面積等於 πab ，式中 a 和 b 分別為橢圓的半長軸和半短軸；圓面積等於 πR^2 ，式中 R 為半徑。

2. 倒置在平面上的圓錐體錐尖所受的作用力

有一質量為 M 的均勻圓錐體，它的中軸 ξ 在起始時和鉛直線 z 之間的夾角為 θ ，圓錐的錐尖位置於一水平地面上的 O 點，如圖 2 所示，圖中的 y - z 平面包含圓錐的中軸 ξ 。已知圓錐體和 y - z 平面相交的三角形的頂角為 β ，圓錐的高度（自頂點至底面的垂直距離）為 h ，圓錐底面的半徑為 R ，且本題中的 $\theta + \beta/2 < \pi/2$ ，回答下列各題：

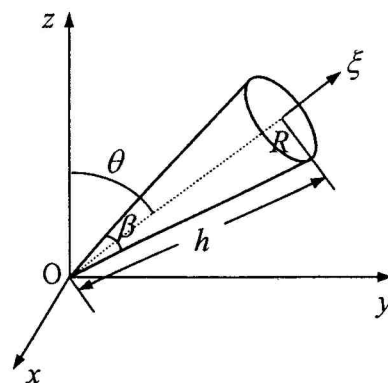


圖 2

- (a) 此圓錐體的質心在中軸 ξ 上何處？
- (b) 若起始時，圓錐是靜止的，且無繞其中軸 ξ 的自旋。當圓錐因重力作用而開始倒下時，因錐尖與

水平地面之間有足夠的靜摩擦力，而能維持在 O 點不動。試問錐尖與水平地面之間的靜摩擦係數的最小值為何？

- (c) 若起始時，圓錐繞其中軸 ξ 以角速度 $\bar{\omega}$ 沿 $+\xi$ 軸的方向自旋，且 ω 值足夠大，使圓錐的質心可以繞 z 軸穩定地迴轉（或稱「進動」），試求圓錐質心繞 z 軸迴轉的角速度 $\bar{\Omega}$ 為何？

- (d) 承(c)小題，此時錐尖在水平面上所受的正向力為何？

3. 單一電子的傳輸現象

本題探討單一電子經由穿隧效應的傳輸現象。在絕緣的基板上有一塊次微米級的金屬顆粒，如圖 3 所示的 A 區，另有三條金屬導線與其鄰近，分別與金屬顆粒各自形成電容，其等效電容值為 C_L 、 C_R 、和 C_G ，各標示在圖上。各導線和金屬顆粒之間有絕緣的氧化層分隔，但其中 C_L 和 C_R 的氧化層厚度較小，電子可以量子穿隧的方式穿越氧化層，進入或離開金屬顆粒；另外，由於 C_G 的氧化層厚度較大，電子無法以同樣的方式穿越該氧化層。今以電壓分別為 V_L 、 V_R 、和 V_G 的電池分別接通三個電容，各電池的負極皆接地。

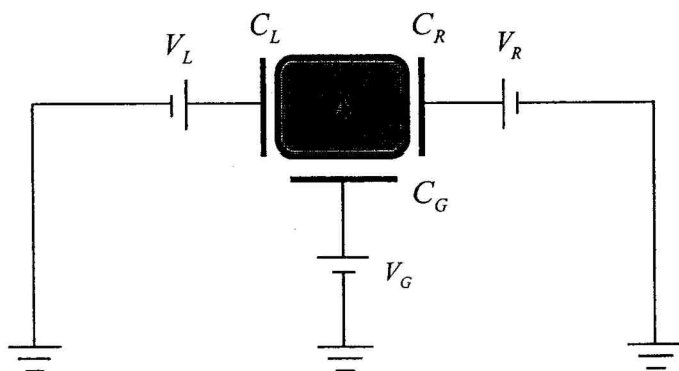


圖 3

- (a) 若金屬顆粒上的淨電荷 $Q = -ne$ ，式中 $-e$ 為一個電子的電量， n 為整數，試求金屬顆粒的電位 V_A ，以 Q 、 $C_i (i = L, R, G)$ 、和 $V_i (i = L, R, G)$ 表示之。
- (b) 試求三電容的總電位能 U ，以 Q 、 $C_i (i = L, R, G)$ 、和 $V_i (i = L, R, G)$ 表示之。
- (c) 若有單一個電子穿越 C_L （或 C_R ）的氧化層，進入金屬顆粒並停留在其內，因此金屬顆粒上的電量變化量 $\Delta Q = -e$ ，回答下列各小題：
- (c-1) 金屬顆粒上電位的變化量 ΔV_A 為何？又各個電容的電量變化量為何？皆以 e 和 $C_i (i = L, R, G)$ 表示之。
- (c-2) 若該電子是經由 C_L 的氧化層穿隧，試求三個電池各自所作的功，並寫出其總功 W_L ，皆以 e 、 $C_i (i = L, R, G)$ 、和 $V_i (i = L, R, G)$ 表示之。
- (c-3) 若該電子是經由 C_R 的氧化層穿隧，試求三個電池各自所作的功，並寫出其總功 W_R ，皆以 e 、 $C_i (i = L, R, G)$ 、和 $V_i (i = L, R, G)$ 表示之。
- (d) 承(c)題，若金屬顆粒上的淨電荷 $Q = -ne$ ，有一部分是經由 C_L 的氧化層穿隧而得，

設為 $-n_L e$ ；其餘是經由 C_R 的氧化層穿隧而得，設為 $-n_R e$ ，即 $n = n_L + n_R$ ，則三個電池總共所作的功 W 為何？以 e 、 n_L 、 n_R 、 $C_i (i = L, R, G)$ 、和 $V_i (i = L, R, G)$ 表示之。

(e) 能量 $E = U - W$ 代表金屬顆粒的靜電能量，其值和金屬顆粒上的淨電量有關。以 $E(n)$ 表示當金屬顆粒的淨電荷 $Q = -ne$ 時，所對應的最低靜電能量。若 $V_L = V_R = 0$ ，但 $V_G \neq 0$ ，回答下列問題：

(e-1) 求 $E(n)$ 的數學式，以 e 、 n 、 V_G 、和 $C_i (i = L, R, G)$ 表示之。

(e-2) 若不考慮溫度的影響，由(e-1)小題的結果，可知 V_G 的電壓值可以改變金屬顆粒的靜電能量。當調整 V_G 至某些特定值時，電子能夠穿隧 C_L 或 C_R 的氧化層，進入或移出該金屬顆粒。若僅有單一個電子經由穿隧效應，進入金屬顆粒，使其淨電子數由原先的 n 個，增為 $n+1$ 個，則 V_G 值應為何？（提示：計算 $E(n+1) - E(n)$ 的能量差。）

(f) 承(e)題，若欲使金屬顆粒中的淨電子數固定為 n ，則 V_G 值的範圍應為何？在此條件下，電子不能進入或移出金屬顆粒，左右導線為不導通狀態，此現象稱為「庫倫阻斷效應」。但要能觀測到這種庫倫阻斷效應，溫度必須夠低才可，試估計熱能 $k_B T$ 的上限為何？式中 k_B 為波茲曼常數， T 為金屬顆粒系統的絕對溫度。

4. 鹽水面受靜電吸引而凸起

一個直徑為 1.0cm 的小塑膠球，均勻帶有 $1.0 \times 10^{-8}\text{C}$ 的正電量。利用一條絕緣細線，將該帶電小球懸掛在大面積的鹽水面的上方，小球的最低點和鹽水面之間的距離為 1.0cm 。結果在小球正下方的鹽水，會受到靜電力的吸引而向上凸起少許，如圖 4 所示。若不計鹽水的表面張力效應，鹽水的密度設為 1000kg/m^3 ，則位居小球正下方的鹽水凸起的高度為何？（提示：鹽水為電解質，具有良好的導電性。）

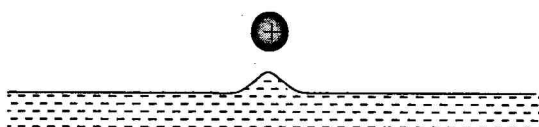


圖 4

【註】：空氣的電容率 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 / (\text{Nm}^2)$

5. 平行光波經平凸透鏡焦聚後的光點大小

圖 5 所示為一條平行於平凸透鏡光軸的入射光線，經透鏡折射後，與光軸相交於 Q 點。設透鏡的折射率為 n ($n > 1$)，透鏡凸面部分的曲率半徑為 R ，其平面部分的孔徑為 D ，且 $D < R$ ，入射光線和光軸之間的距離為 ρ ，透鏡中心的厚度為 δ ，回答下列問題：

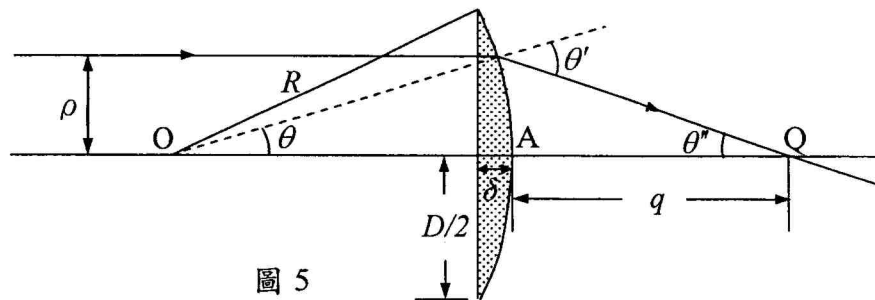


圖 5

- (a) 設透鏡的頂點 A 和 Q 點之間的距離為 q ，利用幾何光學的光線追跡法，求出 q 的函數關係式，以 n 、 ρ 、和 R 表示之。
- (b) 承上題，證明在 $\rho \ll R$ 的條件下（僅計及 ρ/R 的一次方項），所有平行於主軸的入射光線（稱為近軸光線），經透鏡折射後，所得的 q 值皆相等，即聚焦在同一點 Q。在此情況下所得的 Q 點稱為焦點 F，對應的 q 值稱為透鏡的焦距 f 。
- (c) 現在焦點 F 上置放一片垂直於光軸的屏幕，並在平凸透鏡的平面部分上，貼置一可調孔徑的光圈。設光圈的直徑調整為 d （其最大值为 D ），此時若以一束平行於透鏡主軸的入射光波，照射整個光圈孔徑，則在屏幕上所呈現的光點的直徑 d' 為何？以 n 、 d 、和 R 表示之（計算時可近似至僅保留一個 $(d/2R)$ 的最低次方項）。
- (d) 根據光波的繞射理論，可知若光圈的孔徑愈小，則繞射的現象就愈明顯。已知平行光波通過直徑為 d 的小孔繞射後，在焦平面上所得的最小光點的直徑為 d'' ，兩者之間的關係式為 $d'' = 1.22 \frac{f\lambda}{d}$ ，式中 λ 為入射光的波長。若結合(c)和(d)所述的兩種效應，並設在焦平面上所呈現的光點直徑 $s = d' + d''$ ，則能產生最小光點的光圈孔徑 d 值為何？所得最小光點的直徑 $s_{\min}$ 為何？以 n 、 λ 、和 R 表示之。

6. 板車因兩端面的溫差而造成滑動

一具密閉的圓柱形氣體容器固定在板車上，板車可在光滑的鐵軌上自由滑動，如圖 6 所示。容器的空重連同板車的質量合計為 $M = 150\text{kg}$ ，容器的長度 $L = 10\text{m}$ 。起始時該容器內裝有質量 $m = 120\text{kg}$ 的理想氣體，

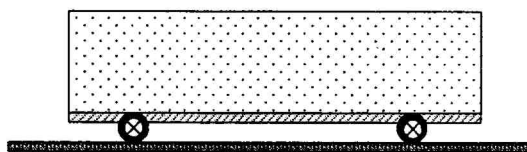


圖 6

容器周圍的溫度 $T_0 = 300\text{K}$ ，此時容器內的氣體壓力 $P_0 = 150\text{atm}$ 。現將容器的右端面加熱至 332K 並保持在此一溫度，而其左端面的溫度仍維持在 300K 。假設容器內的氣體可視為理想氣體，且不因溫度變動而引起任何化學變化，則當容器內的氣體重新達成平衡狀態時（此時容器內的氣體溫度可近似為沿著圓柱中心軸的方向，呈現線性分布），問：

- (a) 容器內的氣體壓力為何？
- (b) 容器本身的中心位置移動了多少距離？