

2012年第13屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第43屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2012年2月18日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 3、可使用無程式之掌上型計算器。

2012年第13屆亞洲物理及第43屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

1. 與小球彈性碰撞的啞鈴

放置在光滑水平桌面上的啞鈴是由一輕質硬桿（長度 L ）、且硬桿兩端各有質量 $2M$ 和 M 的小球所組成。一質量 m 的小球（ $m < M$ ），在桌面上平行 x 軸方向以等速率 V 與 $2M$ 球作正向彈性碰撞，如圖 1 所示， O 點為啞鈴的質心。若小球均視為剛體，回答下列問題：

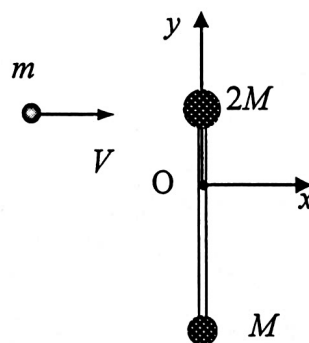


圖 1

- (a) 碰撞後的瞬間， m 、 $2M$ 和 M 三球的速度各為何？
- (b) 碰撞後的瞬間， $2M$ 球相對於啞鈴質心之角速度。
- (c) 欲使質量 m 的小球與啞鈴發生第二次碰撞，則第

一次碰撞後，啞鈴最少需旋轉多少角度， $\theta_{\min}$ ，才會發生第二次碰撞？

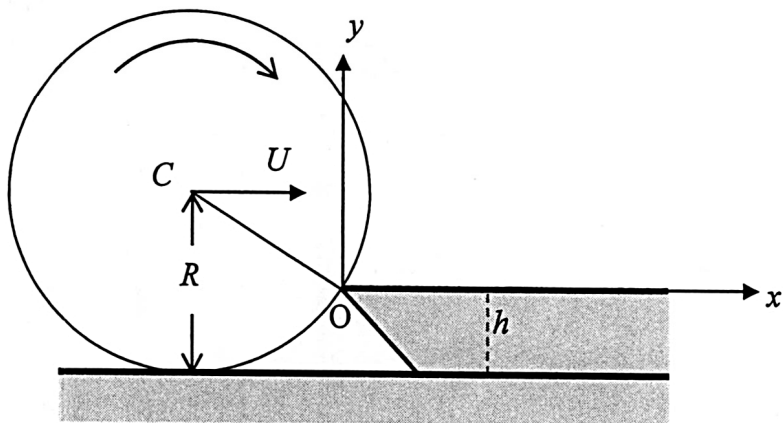
- (d) 若在 $\theta_{\min}$ 時發生第二次碰撞，則小球 m 發生第一次碰撞到第二次碰撞所經歷的時間為何？
- (e) 質量 m 的小球在第一次碰撞後到第二次與啞鈴相碰之間，相對啞鈴質心所平移的距離為何？
- (f) 若質量 m 的小球不與啞鈴發生第二次碰撞，則 M/m 之比值應為何？

2. 實心球垂直入射撞球檯邊之運動

考慮在撞球檯上的一均勻圓球，球與水平檯面間的動摩擦係數為 μ 。球的半徑為 R ，質量為 m ，而檯邊的內緣突出成尖角狀，檯邊頂部為水平且高出檯面 h ，如圖 2 和圖 3 所示。初始時，球的質心 C 沿水平方向（取為 x 軸方向）以等速率 U 、垂直於檯邊（與 z 軸重合）前進，且整個球繞其中心軸（沿 z 軸方向）在檯面上作純滾動運動，直到撞上檯邊。假設球與檯邊均為剛體，且兩者之間無摩擦力，即沒有平行於接觸面的作用力。發生碰撞時，球只與檯邊的尖角有接觸，且此尖角可視為一點，取為原點 O 。由於碰撞歷時極短，碰撞期間的球心位置可假設為不變。

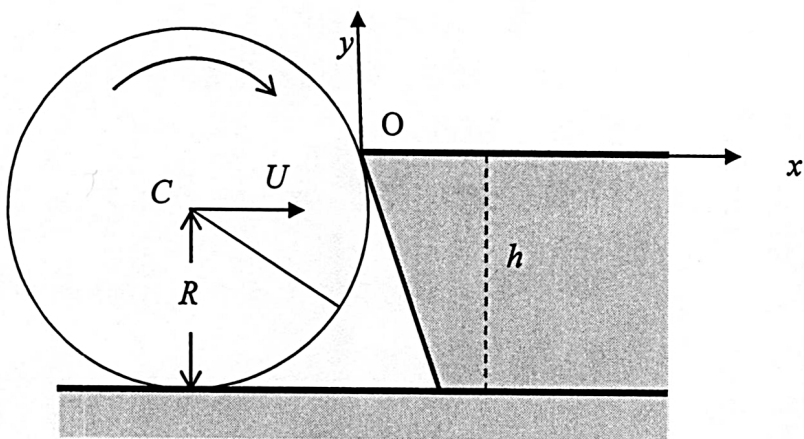
- (a) 當 $0 < h \leq R$ 時，如圖 2 所示， OC 連線是斜向上，因此球與桌面摩擦損耗和摩擦力的衝量可以忽略不計。試求尖角施予球之衝量，以及在剛碰撞後的瞬間，球的質心速度與角速度。

圖 2



(b) 當 $2R > h > R$ ，如圖 3 所示，假設因碰撞而出現的檯面對球底部的動摩擦力，恆指向 x 軸方向(使轉速變慢)，試求碰撞時尖角施予球之衝量。

圖 3



3. 菱鏡成像

一個菱鏡之頂角為 2β ，且 $2\beta \approx \pi$ 。在菱鏡左邊 L 處的中心軸上放有一單狹縫 A ，而

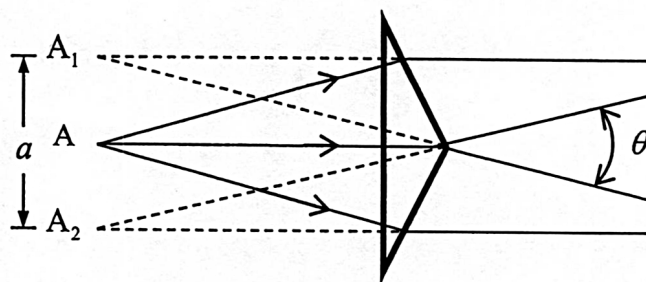


圖 4

菱鏡

從菱鏡右方向左看去，卻可看見兩個單狹縫 A_1 與 A_2 ，且兩者之間的距離為 a 。因為狹縫長軸垂直插入紙面，與菱鏡寬平行，故此系統可以用二維平面考慮之，如圖 4 所示。回答下列問題：

(a) 計算圖 4 中單狹縫的兩像 A_1 與 A_2 相對於菱鏡中心的展角 θ 。

- (b)在菱鏡右方中心軸上，置放一個凸透鏡與一成像屏幕。當固定菱鏡與屏幕距離，而凸透鏡在兩者之間移動時，有兩位置會發現螢幕上都可以看見 A 經菱鏡和透鏡所成的兩個像 A_1 與 A_2 ，而此兩位置上所測得屏幕上 A_1 與 A_2 的間距分別為 b 與 B ，

計算圖 4 中單狹縫的兩像 A_1 與 A_2 的間距 a 。

- (c)將凸透鏡移除後，以單色光源照射單狹縫 A，並於菱鏡右方遠處距離 R 處的屏幕 S ，形成明暗相間的干涉條紋，如圖 5 所示。若亮紋間距為 d ，則光源的波長為何？
(d)今將一厚度為 t 的薄膜貼在菱鏡上半部時，發現(c)中之明暗條紋移動了 Δy 的距離，則該薄膜可能的折射率為何？

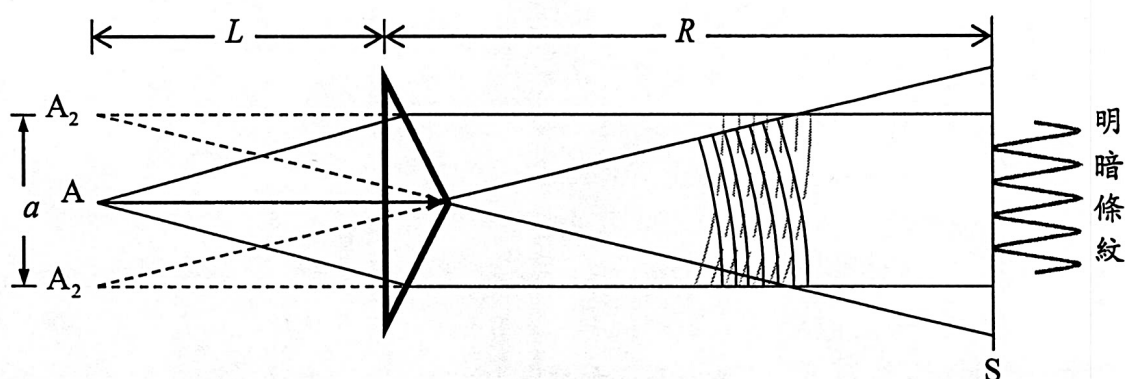


圖 5

4. 半透膜絕熱系統

考慮一個不變形之長方體容器，以可水平移動的分隔牆分成 A、C 兩室。A 室上方聯通 B 室，聯通處有一半透膜。B 室上端為一活塞，活塞對氣體施以一個固定壓力，如圖所示。A、B、C 室內分別都有 0.5 莫耳氬氣（單原子分子所構成），而 A 室內另有 1.0 莫耳的氧氣。除了 B 室中的活塞可以導熱以外，器壁及分隔牆都是絕熱材料，所有氣體都無法穿透分隔牆，而聯通處半透膜只能讓氬氣通過，氧氣無法通過。假設氬氣及氧氣都可視為理想氣體，且起始壓力與溫度的選取恰好使得 A、B、C 三室的體積相等。則：

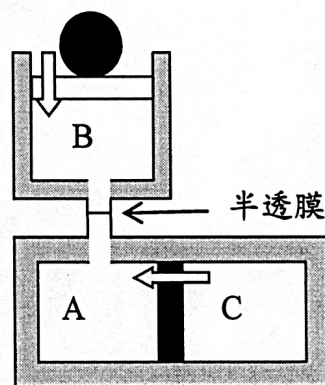


圖 6

- (a)起始時，A、B、C 三室的絕對溫度比 ($T_A:T_B:T_C$)，為何？

若 B 室內活塞慢慢向下壓縮移動並保持準靜過程，同時使活塞保持在一定壓力條件下，直到 B 室底部，即 B 室體積變為零。在這過程中 A 和 C 之間分隔牆也會移動，假設 A 和 B 之間聯通管及相關器壁上孔洞之體積可以忽略，則：

(b) 最後 A、C 兩室的體積比， $\frac{V_A}{V_C}$ ，為何？

5. 含金屬小球之複合材料與介電崩潰(dielectric breakdown)

介電質在一外加電場下，其正負電會分離形成電偶極進而影響物質之電性。本問題探討金屬小球在物質中對電偶極之貢獻及對等效電容之影響。

(a) 如圖 7 所示，在考慮點電荷在金屬表面所產生之電場時，可以使用鏡像法求得。以圖 7 為例，若將金屬接地，將金屬表面視為無限大平面，則位於 $x=a$ 之點電荷 q 在 $x>0$ 之區域所產

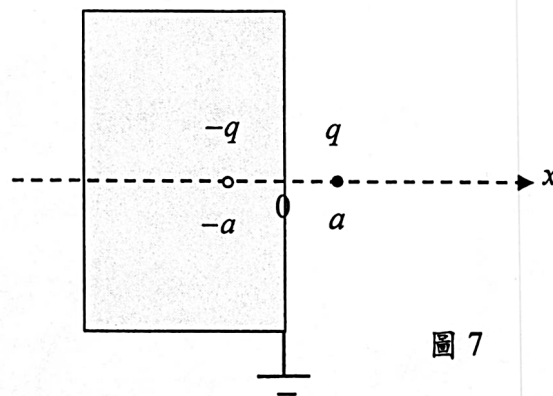


圖 7

生的電場為點電荷 q 與其位於 $x=-a$ 之鏡像電荷 $-q$ 所產生之電場總和，其中點電荷 q 與鏡像電荷產生的位能在 $x=0$ 為 0，滿足金屬接地的設定。應用鏡像法，考慮一接地、半徑為 a 之金屬球，如圖 8 所示，求一距離金屬球心 $x(x>a)$ 之點電荷 q 的鏡像電荷之位置(以 O 為原點)與電荷值。(2 分)

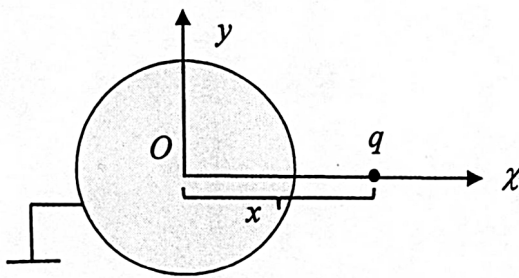


圖 8

(b) 已知真空電容率為 ϵ_0 ，利用(a)小題結果，求在外加均勻電場中 $\vec{E}$ 之未帶淨電荷、

半徑為 a 之金屬球所帶之電偶極矩。(提示：利用 $|x| < 1$ ，則 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots$)

(c) 如圖 9 所示，有一單位體積有 n 個未帶淨電荷、半徑為 a 之金屬小球的複合材料，金屬小球在空間分布是均勻的，且金屬小球以外的材料其對電偶極矩的貢獻可被忽略。今複合材料在一外加電場均勻 $\vec{E}_0$ 作用下，若考慮小球之間的交互作用，真實作用在每一金屬球之電場並非 $\vec{E}_0$ ，而是隨位置變化，為了探討複合材料

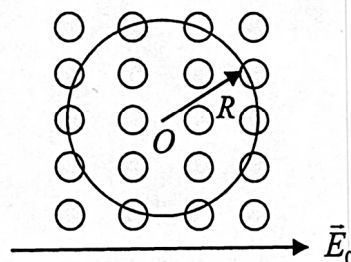


圖 9

的電性，定半徑 R 之球內的平均電場 $\bar{E}$ ， R 比 a 甚大但甚小於複合材料的體積。試求半徑 R 之球外，作用在 O 點附近單一金屬小球的平均外加電場 $\bar{E}_{ext}$ ，並由此求出決定單位體積的電偶極矩 $\bar{P}$ 與電場 $\bar{E}$ 間比值的介電極化率 χ (即 $\bar{P} = \epsilon_0 \chi \bar{E}$ 中的比例數值)。

- (d) 如圖 10 所示，今將 (c) 小題中之金屬小球的複合材料插入平行金屬板電容器中，若電容器平行金屬板相距 d ，面積為 A ，所帶電荷維持為 $\pm Q$ ，試問因插入複合材料，電容器儲存的能量增加或減少？求所對應的增加量或減少量 (以 χ ， A ， d ， Q 與 ϵ_0 表示)。若在插入複合材料時，電容器外接一 V 伏特之電池，則因插入複合材料，電容器儲存的能量增加或減少？求所對應的增加量或減少量 (以 χ ， A ， d ， V 與 ϵ_0 表示)。

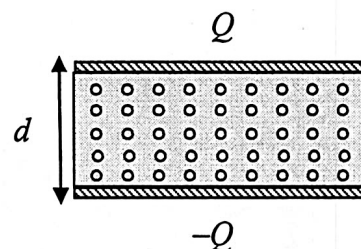


圖 10

- (e) 當嵌入的金屬球密度增加時，(d) 小題之電容器之電容亦增加，最後趨近無限大，其所對應的現象為介電崩潰，此時金屬小球開始互相接觸，複合材料形成導通之狀態而能導電。一般介電材料，在接近介電崩潰時，電容值會以 $C \approx C_0 (\nu_c - \nu)^{-s}$ 發散，其中 ν 為材質中已形成導電的體積所佔之比例，而 ν_c 則是達到介電崩潰的臨界體積比例， s 為發散指數。若金屬小球的分佈如 (c) 小題所述是均勻的，在電場以平均近似估計下，求此複合材料的 ν_c 與發散指數 s 。

6. 地板發電裝置

當人踩踏一地板時，地板會發電，其原因是在地板下裝有一發電裝置，如下圖 11 所示。該裝置的主要結構是一截面半徑為 r ，匝數為 n 的線圈無摩擦地套在磁場方向呈輻射狀的永久磁鐵槽中，磁場之磁力線方向沿徑向分布，該磁鐵槽之橫截面之俯視圖如圖 11 所示。地板的四個角上分別連接一彈力常數 k 之彈簧 (圖中只畫出二個)。輕質硬桿將地板與線圈連接 (圖中未繪出)，而帶動線圈上下往返運動使之發電。假若線圈不發生形變，且線圈所在處之磁場量值為 B ，線圈之總電阻為 R_0 ，並用此一裝置供應電阻為 R 之小燈泡發亮。假設一人走過地板時，地板所受的力使線圈產生的位移 x 隨時間 t 的變化為圖 12 所示，設線圈之起始位置在 $x=0$ ，取鉛直向下之位移為正方向 (硬桿及地板的質量不計)，回答下列問題：

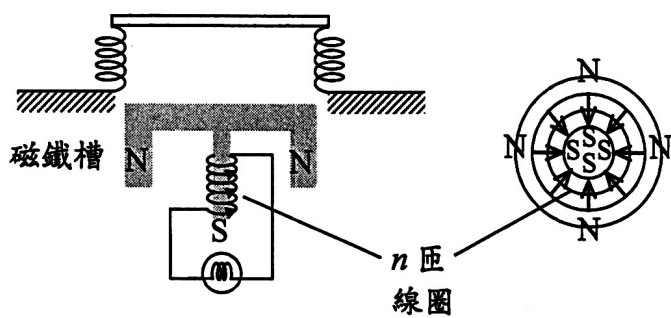


圖 11

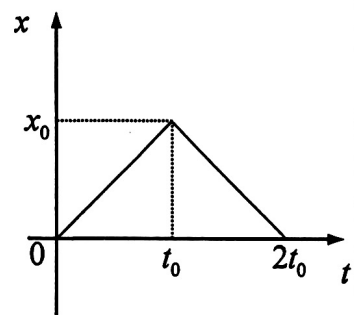


圖 12

- (a) 試求線圈中感應電流 $i(t)$ ，並畫出 i 隨時間 t 變化的曲線，取圖 12 中逆時針電流方向為正。
- (b) 試求 $t = \frac{t_0}{2}$ 時，地板所受之作用力。
- (c) 試求該人踩踏地板一次所做的功。