

2013年第14屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第44屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2013年2月2日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 3、可使用無程式之掌上型計算器。

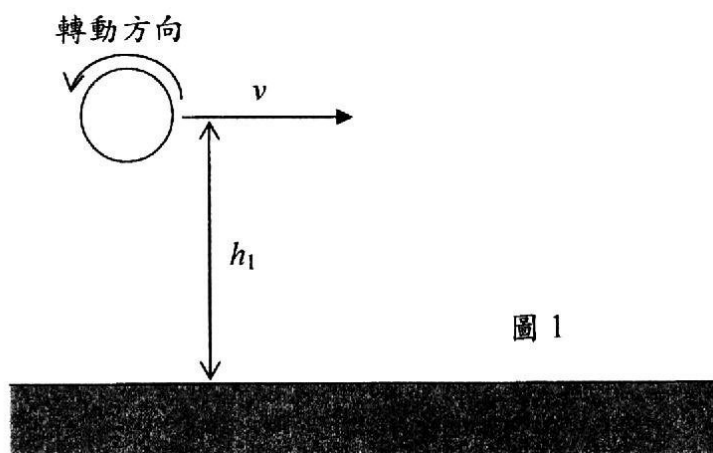
雄中物理科掃描版本

2013年第14屆亞洲物理及第44屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

1. 碰撞問題

- (a) 一快速轉動，且質量為 m 的小圓球(半徑 R)，自高度為 h_1 以速率 v 水平拋出，撞擊地面後彈起。小圓球轉動的方向為逆時鐘方向，轉軸通過質心且與水平速度垂直，如圖 1 所示。圓球撞擊地面時，球面與地面之間發生滑動，地面與球面之間的動摩擦係數為 μ_k 。彈起後，最後高度為 h_2 ，此時圓球的水平速率是多少？



- (b) 兩質量均為 m 的小球，以長度為 ℓ 之細輕鋼桿連接，起始時兩小球靜止在一光滑的水平面上，其中一小球在坐標原點，另一小球在正 y -軸上。在 $t=0$ 時，有一小塊黏土以 u 之速率沿著正 x -軸方向擊中位於原點的小球，並與小球在瞬間接合成一體。已知此塊黏土的質量亦為 m ，求黏土與該小球在 $t>0$ 之運動軌跡，即其位置坐標 (x, y) 以時間的函數表示之。

2. 漂浮搖擺的木塊

有一均勻木塊比重 ρ 小於 1，其長寬高分別為 $2a$ 、 $2b$ 和 $2c$ ，且其中 $2a$ 邊遠大另外兩邊即 $a \gg b$ 和 $a \gg c$ ， $2b$ 面的中心線與水面的相交點為 A，如圖 2 所示。當此木塊以圖 2 中的方式($2a$ 邊為射入紙面)浮於水面時，則

- (a) 木塊受到浮力作用，其等效浮力作用點的位置稱之為浮心；求浮心的位置與 A 點的距離為何？在 A 點之上或之下？
- (b) 當此木塊傾斜一小角度 α 時，其浮心的位置與 A 點的距離為何？在 A 點之上或之下？
- (c) 在 $b \gg c$ 的條件下，木塊是可以正立且穩定地浮於水上。但是當 $\frac{b}{c} < \sqrt{\frac{3}{2}}$ 時，則木塊的比重 ρ 只能在限定的範圍內，木塊才可以穩定地浮於水面，求符合此條件之

雄中物理科掃描版本

比重 ρ 的範圍。

- (d) 承(c)小題，在比重 ρ 符合穩定浮在水面上的條件下，若讓此木塊傾斜一小角度 α 後放開，則木塊會左右搖擺，求此擺動之週期。(已知 M 為木塊質量，木塊轉動慣量為 $I = \frac{M}{3}(b^2 + c^2)$ ，並假設木塊和水的摩擦力、以及波動效應均可忽略。)

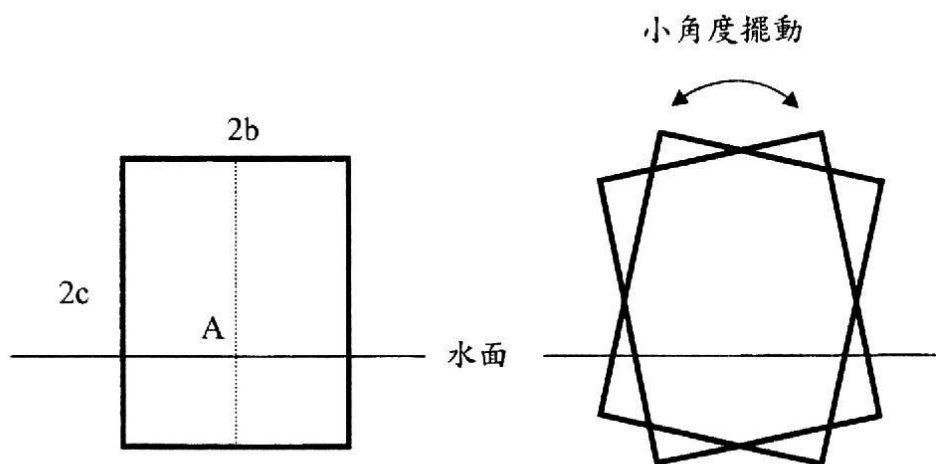


圖 2：圖示木塊浮在水面和小角度擺動。為了圖示清楚，小角度擺動的角度被誇大了。

3. 比熱的測量

比熱是材料重要的特性之一，其中有一種量測樣品比熱的方法稱之為熱弛豫方法 (Thermal Relaxation Method)。圖 3 為此測量方法的示意圖，樣品置於超高真空腔中，並與導熱良好的基板相連，基板藉由導熱線與恆溫熱庫 T_0 相連接。實驗的設置可忽略熱輻射和對流的效應，而僅考慮傳導的熱效應，測量的方式分為兩個步驟，

- (1) 當系統達成熱平衡後，自時刻 $t = 0$ 開始加熱至時間 t_1 ，並測量基板溫度隨時間的變化，由此數據可以推算出樣品的比熱。
- (2) 或自某一特定時間 t_1 阻斷熱源，讓樣品與基板自然降溫。此時測量基板在降溫過程中，溫度隨時間的變化，由此數據也可以推算出樣品的比熱。

藉由(1)或(2)所描述的熱弛豫實驗方法，可分析出未知樣品的每單位質量比熱 c_s 。通常加熱用的熱源輸出功率為定值，故基板每單位時間所吸收的熱量 P 也為定值。設樣品的質量為 m ，基板的熱容為 C_p ，而導熱線之熱傳導係數為 κ 、等效截面積為 A 、等效的長度為 L 。在有限的實驗溫度範圍內，上述參數可以視為定值，則

- (a) 假設樣品與基板間導熱極佳，兩者可以視為溫度相同，則在時間 0 到 t_1 之間的升溫過程中，基板溫度(包含樣品) T 與時間 t 的關係式為何？
- (b) 承(a)小題，假設樣品與基板間導熱極佳，兩者可以視為溫度相同，若加熱升溫過程的時間 t_1 極短，在實驗量測上發現 t_1 時刻測到基板上升的溫度 T 與 t_1 成正比，求在 t_1 極短條件下， c_s 與 t_1 、 C_p 、 P 和 T 的關係式為何？
- (c) 承(a)小題，若加熱升溫過程的時間 t_1 足夠長，可視為 $t_1 \rightarrow \infty$ 。自時間 t_1 阻斷熱源

雄中物理科掃描版本

後，基板與樣品開始同時降溫，求過程中基板溫度 T 與時間的關係式。

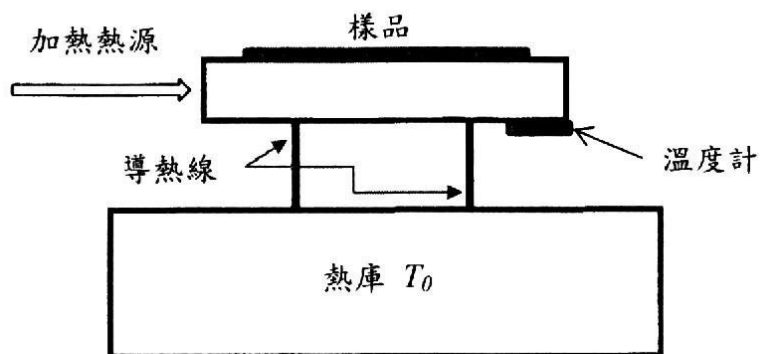


圖 3

- (d) 承(a)小題，負載樣品的基板受到固定的加熱源加熱，已知基板每秒所吸收的熱量 P 為 9 焦耳，且基板的熱容 $C_p = 25 \text{ J/K}$ ，樣品的質量 m 為 2 公克，熱庫的溫度 T_0 為 15°C 。若加熱升溫過程的時間 t_1 足夠長，自時間 t_1 阻斷熱源開始降溫後，記錄基板的溫度隨時間的變化，其結果如表一所示。由表中的數據，求得樣品的比熱 c_s 的數值。(請利用所附的方格紙作圖，請標明相關的物理量與單位，並隨答案卷一起繳回。)

表一：樣品與基板在降溫過程中，溫度與時間的變化。

時間 (單位秒，且自 t_1 時刻開始計時)	溫度 ($^\circ\text{C}$)
0	17.40
2	16.96
4	16.61
6	16.32
8	16.08
10	15.88
14	15.59
18	15.40
22	15.27
26	15.18
30	15.12
34	15.08
38	15.05
42	15.04

【提示】積分公式： $\int \frac{dx}{x} = \ln x$

4. 波動水面下的亮暗紋

如圖 4 所示考慮鉛直入射水面、強度均勻分布的平行光線，在水面下所產生的亮暗條紋。此鉛直面定為 (x, z) 平面，假設水的折射率為 n ，水表面的形貌由 $z = f(x)$ 所描述，而水底面的位置為 $z = -D$ 。

(a) 若光線接觸水面的位置為 $(\tilde{x}, \tilde{z})$ ，其中 $\tilde{z} = f(\tilde{x})$ 。證明通過 $(\tilde{x}, \tilde{z})$ 處的光線之入

射角 θ_i 及折射角 θ_r ，分別滿足

$$\tan \theta_i = f'(\tilde{x}) \text{ 及}$$

$$\tan \theta_r = \frac{f'(\tilde{x})}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)f'(\tilde{x})^2}}。$$

【說明】 $f'(\tilde{x})$ 為 $f(x)$ 對 x 微分，即

$\frac{d}{dx} f(x)$ ，後，再將 $\tilde{x}$ 代入。依此

類推， $f''(\tilde{x})$ 為 $f'(x)$ 對 x 微分，

即 $\frac{d}{dx} f'(x)$ ，後，再將 $\tilde{x}$ 代入。

(b) 證明通過 $(\tilde{x}, \tilde{z})$ 處的光線在經水的折射後在池底(即 $\tilde{z} = -D$)的水平坐標位置為

$$\tilde{x}' = \tilde{x} + [D + f(\tilde{x})] \frac{f'(\tilde{x}) [\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)f'(\tilde{x})^2} - 1]}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1)f'(\tilde{x})^2} + f'(\tilde{x})^2}。$$

(c) 若水面形貌的振盪或波紋的振幅遠遠小於水深、且相對平坦(即其曲率很小，曲率半徑大於 D)，則 $\tilde{x}' - \tilde{x}$ 與 $f'(\tilde{x})$ 成正比，即 $\tilde{x}' - \tilde{x} \propto f'(\tilde{x})$ ，求此比例常數，並以 n 和 D 表示之。

(d) 鉛直入射水面的光強度是均勻分布的，但是經過水面不同形貌的折射後，會在底部產生亮暗的不均勻分布。假設入射水面的光線完全透射，承(c)小題的結果，求光線在水底面光的相對強度分布，即與該點上方之平行入射光強度分布的比值。

(e) 承(d)小題，若水面形貌的函數為 $f(x) = A_0 \sin(\frac{2\pi}{\lambda} x)$ ，其中 λ 是一個定值，求水底面最亮及最暗的位置。

【提示】微分公式， $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ ， $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ 。

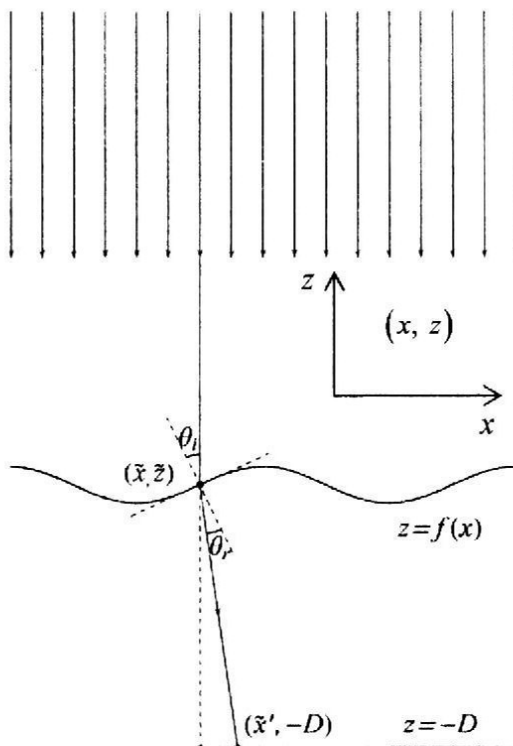


圖 4

5. 彈簧與平行電極板

有一鉛直置放之平行板電容器，其下電極板位置固定，而質量為 m 的上電極板懸吊在一彈性常數為 k 的導電彈簧上，彈簧質量可以忽略不計，如圖 5 所示。兩電極板的面積均為 A ，當電極板上的電荷為零時，兩板之間平衡間距為 d 。

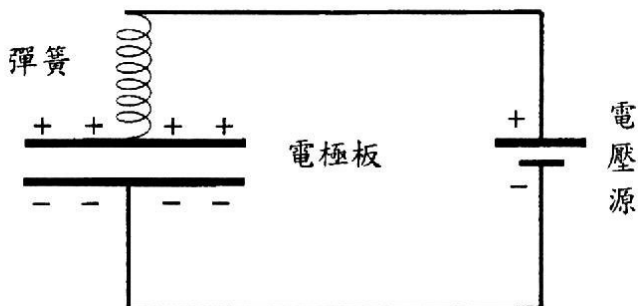


圖 5

- (a) 若在兩電極板上分別放置 $\pm Q$ 之電荷，則兩極板的平衡間距為 $d-x$ ，求 x 與 Q 之關係式，及 Q 之最大值， $Q_{\max}$ 。

- (b) 現用一可變電壓源，將兩電極板上的電壓由零開始很緩慢

地上升至 V ，求 x 與 V 之關係式，以及 V 之最大值， $V_{\max}$ 。討論在 $V > V_{\max}$ ，會發生什麼情況。

- (c) 在 $V < V_{\max}$ 時，電壓源所做之功為何？儲藏在兩電極板之間的靜電能為何？證明能量是否守恆。

- (d) 在 $V = V_{\max}$ 時，將電壓源連線斷開，並將上電極經由一電阻 R 接地後，開始很緩慢地流失電荷，求電極板之電荷量降至原來電荷量的一半時所需的時間。

【提示】積分公式： $\int \frac{dx}{x} = \ln x$

6. 軌道充電裝置

一電容為 C 的電容器，其長度、質量均可忽略且起始不具任何電荷，連接兩截面積相同，長度為 D ，質量為 m ，電阻為 R 的均質金屬棒，成為如圖 6 所示之金屬棒裝置。取此完全相同裝置兩個，以適當的距離平行置於兩條間距為 L ($L < 2D$)，長度極長的平行金屬軌道上，成為如圖 7 所示之迴路。金屬棒在金屬軌道上滑行時保持接觸，且其間摩擦、電阻及金屬軌道的電阻均可忽略。將此迴路置於水平地面上，且此地具有垂直穿入地面的均勻穩定磁場 B 。計時開始時 ($t=0$)，一金屬棒裝置靜止，另一裝置以平行軌道的初速 v_0 ，遠離靜止的裝置，而在裝置運動的過程中，電容器被充電。

- (a) 若就電容器的充電過程，將此迴路等效為由一電池對一電容器充電的簡單 RC 充電迴路，則此簡單迴路中電池的等效電動勢與電容器的等效電容值為何？
 (b) 若忽略電磁輻射，則迴路中兩裝置的運動速度隨時間的變化為何？
 (c) 兩裝置的運動是否能達到終端速度？若能，兩裝置運動速度的差值為何？
 (d) 若將裝置中的電容器短路，則相當於僅是金屬棒在金屬軌道上滑行，當 $t \rightarrow \infty$

時，兩金屬棒的運動是否能達到終端速度？若能，其運動速度的差值為何？最後金屬棒的間距較起始時增加多少？

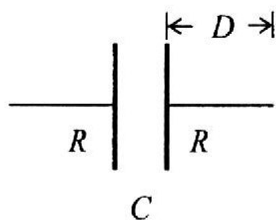


圖 6

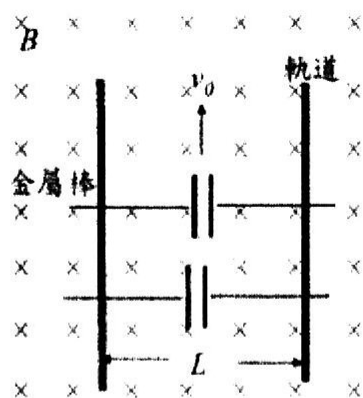


圖 7

【提示】積分公式： $\int \frac{dx}{x} = \ln x$