

2014年第15屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第45屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2014年2月15日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 3、可使用無程式之掌上型計算器。

可能用到之常數列表

名稱	符號	數值與單位
光速	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$
基本電荷電量	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
氣體常數	R	$8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$
波茲曼常數	k_B	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
史蒂芬-波茲曼常數	σ	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

數學公式(t 為時間， x 為任意物理量)

$$1. \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right)$$

$$2. \frac{d}{dx} x^m = m \cdot x^{m-1}$$

$$3. \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$4. \text{當 } |x| \ll 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

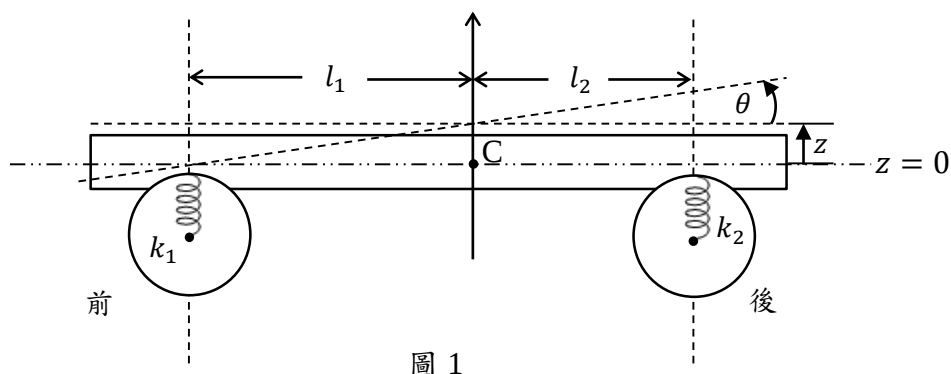
$$5. \text{當 } x \ll 1, \quad \sin x \approx x$$

2014年第15屆亞洲物理及第45屆國際物理奧林匹亞競賽 國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、汽車小幅鉛直振盪之簡易模型

利用一個簡化模型，我們可以分析靜止汽車的小幅鉛直振盪運動。假設車子可視為如下圖 1 所示的平面系統，靜止時質心位於 C；其質心只能沿鉛直方向做小幅的上升下降運動。車身的質量為 m ，當繞通過質心且垂直於鉛直面的水平軸轉動時，車身所具有的轉動慣量為 $I = mL^2$ ， L 為迴轉半徑。前後輪視為剛體，支持車身重量的兩個理想彈簧，只能沿鉛直方向伸縮，其下端固定於車輪中心，而力常數分別為 k_1 與 k_2 。兩車輪中心與質心之間的水平距離分別為 l_1 與 l_2 ，回答問題時，以 z 代表質心的位移(向上為正，見圖 1)，以 θ 代表車身轉動的角位移(以逆時鐘方向為正，見圖 1)，且 z 與 θ 均以車子在重力下達靜止平衡時的值為其零點。



- (a) 由車身在鉛直平面的運動方程式(即質心的運動方程式和車身繞質心的轉動方程式)簡化，可以得出鉛直線上之加速度(即 $\ddot{z}$)、和繞質心轉動之角加速度(即 $\ddot{\theta}$)為下兩式：

$$\ddot{z} = -az - b\theta$$

和

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{L^2}z - \frac{c}{L^2}\theta。$$

寫出上兩式中 a 、 b 和 c 的表達式。

- (b) 假設 $b > 0$ ，且車身的鉛直上下運動與繞質心的轉動，均以同一角頻率進行簡諧運動。這種運動稱為簡正模態，試求此種運動的角頻率 ω_n (其中 n 為整數，代表不同簡正模頻率)，並求每個簡正模態下 z 與 θ 的振幅比 A_n/B_n (以 a 、 b 、 c 、 L 表示)。
- (c) 已知在簡正模態下的運動，相當於繞某一個點 P_n 的純轉動。在 $b > 0$ 的已知條件下，令每個 P_n 至質心 C 的距離為 d_n ，試求比值 $d_1 d_2 / L^2$ 。此題中以 $n = 1$ 代表頻率最高之簡正模態， $n = 2$ 為次高角頻率模態。
- (d) 假設 $b = 0$ ， $c \neq aL^2$ 。當 $t = 0$ 時，將車子鉛直往下壓低一個距離 h ，沒有任何轉動。試求車子的鉛直位移 z 與角位移 θ 隨時間的變化。

二、負離子之電偶極束縛態

- (a) 許多非球形分子的正負電荷中心不重合而形成電偶極，如右圖 2 所示，其中 O 為原點，某一分子的正負電中心之電荷為 q 與 $-q$ ，均位於 z 軸上，其位置分別為 $z = d/2$ 與 $z = -d/2$ 。設電偶極之電偶極矩 $p = qd$ ，若 A 點之方向與 z 軸之夾角為 θ ，且其距原點 O 之距離 r 遠大於兩電荷的距離，即 $r \gg d$ 。設無限遠為位能零點，試求 A 點之電位(精確到電偶極矩 p 的一次項)，並求沿 $\hat{r}$ 方向和 $\hat{\theta}$ 方向之電場。

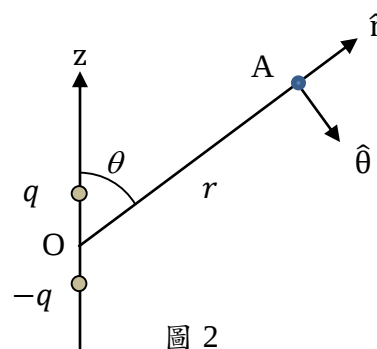


圖 2

- (b) 有一些帶負電荷之負離子是由中性分子之電偶極 p 與電子束縛而成。如圖 3 所示，分子的電偶極為沿 z 軸方向，假設分子固定於原點且其電偶極是固定的，已知一電子的電荷為 $-e$ ($e > 0$)，質量 m ，且由量子物理可知對 z 軸之不為零的角動量最小為 $\hbar$ ，若電子被束縛在對電偶極張角為 θ 之錐形筒上且與 z 軸垂直的平面相交之圓形軌道上運動。若 r 遠大於中性分子長度，試求 $\cos\theta$ 的數值，以及電子相對於原點之角動量的 z 軸分量，並求出要能束縛電子在上述圓形軌道上，中性分子所需具備之最小的電偶極矩 p 為何？

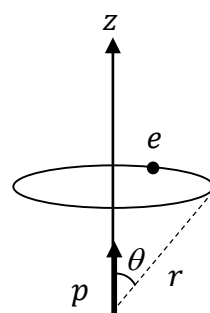


圖 3

- (c) 當分子為球形時，在未加電場前，因球形對稱的分子其正負電荷中心是重合的，故分子不具固定的電偶極矩。若某一中性分子之正負電荷可以視為兩均勻帶電且半徑為 a 之球體，如下圖 4 所示。在外加電場 E 下，正負電荷中心分離最後達一平衡位置，假設在各球體之電荷分佈不變，且兩球體中心分離距離甚小於半徑 a ，試求此分子之電偶極矩。

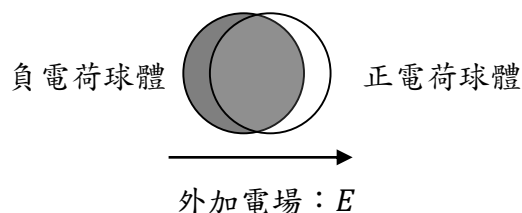


圖 4

- (d) 利用以上結果，假設此分子的正負電荷中心在電場下瞬間達到平衡位置，已知一電子在以該分子為中心之半徑為 R 的圓形軌道上運動，且 R 甚大於兩球體中心分離距離，試求此帶一負電荷之負離子的能量(設無限遠為位能零點)。

三、磁場中運動的帶電粒子

考慮一個質量為 m 、電荷為 q 的粒子在磁場中運動。

- (a) 若磁場為均勻，即 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 \hat{z}$ ，其中 B_0 為一定值。當 $t=0$ 時，粒子的初速 $\mathbf{v}_0$ 等於 $v_{\perp,0} \hat{x} + v_{\parallel,0} \hat{z}$ 。證明此粒子的運動軌跡為一螺線，並求此迴旋運動且在 $x-y$ 平面上之角速度和 z 方向的速度。
- (b) 設 s 為迴旋運動的半徑，由(a)的結果，求此粒子沿 z 方向的角動量 L_0 。
- (c) 若磁力線分布是圓柱形對稱(無繞 z 軸旋轉分量)，如下圖5所示，及 $\vec{B} = B_r \hat{r} + B_z \hat{z}$ ，

其中 $\hat{r}$ 是 $x-y$ 平面上徑向的單位向量，且在同一 $x-y$ 平面上 $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ 近似於一個定值 β ，

即 $\frac{\partial B_z}{\partial z} \sim \beta$ ，與徑向距離 r 無關。由於磁力線是封閉曲線，依據磁的高斯定律有下列關係：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

求 $\frac{\partial B_r}{\partial r}$ 與 β 的關係式。

註： ∂ 表示為偏微分，在此題中其作用如全微分，即 $\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = B_r + r \frac{\partial B_r}{\partial r}$ 。

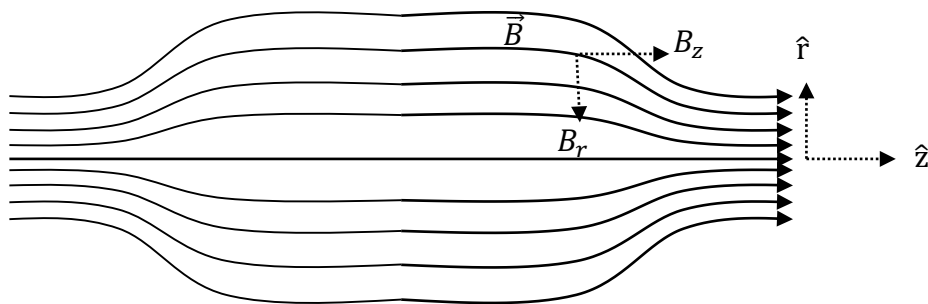


圖 5

- (d) 承上小題，若磁場很弱，且在軸向變化很緩慢，因此帶電粒子在 $x-y$ 平面上的迴旋運動，會使其產生一個等效的磁偶極矩，求此磁偶極矩，以及粒子沿 $\hat{z}$ 方向所受的力。(提示：此磁偶極矩不會隨時間變化)
- (e) 隨 z 變化的磁場可以用來造出「磁瓶」，它可以把帶電粒子的運動限制在有限的範圍內。由(d)小題的結果，若 B_1, B_2 分別是最小及最大的 $\hat{z}$ 方向磁場量值，求 $v_{\parallel,0}/v_{\perp,0}$ 必須小於何值，帶電粒子才不會跑出「磁瓶」的範圍。(假設粒子的初始位置是在最小磁場)

四、地球表面的溫度模型

太陽光到達行星的大氣層後，有一部分(其比率以 r 表示)會被反射回外太空；剩餘的部分 $1 - r \equiv \alpha$ (數據見下表一)，則可被大氣與行星表面完全吸收，再以紅外線向外太空輻射。我們假設太陽、地球與金星表面的輻射均可視為理想黑體輻射，且已知太陽黑體輻射的溫度 $T_S = 5780 \text{ K}$ ，下表為太陽、地球與金星的一些其他數據。以下各部分的題目中所稱的溫度，指的一律是絕對溫度。

表一：吸收率列表

	平均半徑(m)	到太陽的平均距離(m)	太陽光被吸收的比率 α
太陽	$R_S = 6.96 \times 10^8$	-	-
地球	$R_E = 6.37 \times 10^6$	$R_{E-S} = 1.496 \times 10^{11}$	70.0 %
金星	$R_V = 6.05 \times 10^6$	$R_{V-S} = 1.08 \times 10^{11}$	23.0 %

A 部分(無溫室效應)：

- (a) 試求太陽光到達地球大氣層頂端表面時，每單位面積的入射功率(即太陽常數 φ)。
- (b) 假設溫室效應不存在(或沒有大氣層)，但前小題中到達大氣層頂端的太陽輻射能，仍有 α 的比率抵達行星表面。當地球與金星表面的溫度達到穩定態時，試分別求出兩者黑體輻射的溫度 T_E (地球)與 T_V (金星)，此種溫度以下稱之為「有效溫度」。

B 簡易溫室效應模型：

我們假設地球的大氣層共有兩層，即對流層與同溫層，且對流層與同溫層互相接觸(即假設對流層頂的厚度為零)，兩層的界面離地表的高度為 $H = 11 \text{ km}$ 。假設就等效的黑體輻射而言，對流層的有效溫度為 T_1 ；而同溫層可視為溫度為 T_2 的等溫層，對紅外線具有很小的吸收率 a ($a \ll 1$)。假設對流層的溫度 $T(z)$ ，隨離地高度 z 以線性的方式降低，且在頂部 $z = H$ 處等於同溫層的溫度 T_2 ，以致其變化可表示為

$$T(z) = T_2 + (H - z)\gamma \quad (1)$$

上式中的 γ 代表對流層大氣溫度的直減率，其值為 6.5 K/km ，地表位於 $z = 0$ 。依上述數據與(b)小題的結果，當溫度達穩定時，試求：

- (c) 同溫層溫度 T_2 與對流層有效溫度 T_1 之間的關係。
- (d) 對流層有效溫度 T_1 的值。
- (e) 同溫層溫度 T_2 的值。
- (f) 地球表面平均溫度 $T(0)$ 的值。

五、平凸透鏡的焦距

- (a-1) 如圖 6 所示，當平面光波垂直入射一平凸透鏡的鏡面時，由於鏡面中央部分的厚度大於邊緣部分，且在透鏡介質內的光速小於在空氣中的光速，故同一波前的邊緣部分較其中央部分，超前透出透鏡，因此透射後的光波形成一向後凸出的近似球面波前。依據惠更斯原理，該球面波前將會聚在主軸上的一點，即焦點 F。焦點至鏡面中心的距離為焦距 f_1 。假設該透鏡的中央厚度 $d_1 = 0.50 \text{ cm}$ ，鏡面直徑 $D_1 = 5.00 \text{ cm}$ ，透鏡介質的折射率 $n = 1.66$ ，以近似球面波前，求透鏡的焦距 f_1 。

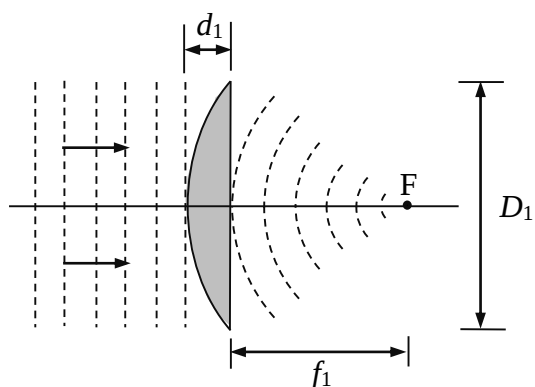


圖 6

- (a-2) 已知在空氣環境中透鏡造鏡者公式為 $\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ ，其中 f 為焦距、 n 為透鏡之折射率， R_1 為光入射透鏡面之曲率半徑， R_2 為光射出透鏡時該面之曲率半徑。若直接應用薄透鏡之造透鏡者公式計算(a-1)小題中平凸透鏡之焦距，則該平凸透鏡的焦距 f_1 為何？
- (a-3) 上述兩者的計算所得之焦距 f_1 數值不同，試以球面波前與造鏡者公式，說明數值大小差異的原因。

- (b) 若以強光透射介質時，介質的折射率 n 會因光強而異，可寫為 $n = n_0 + al$ ，式中 n_0 為正常的折射率（在弱光照射的情況下）， I 代表光強， a 為一常數。圖 7 所示為一均勻的正方形玻璃板，厚度 $d_2 = 10.0 \text{ cm}$ ，假設平面強光波垂直入射於玻璃板面，入射光的強度分布如下式：

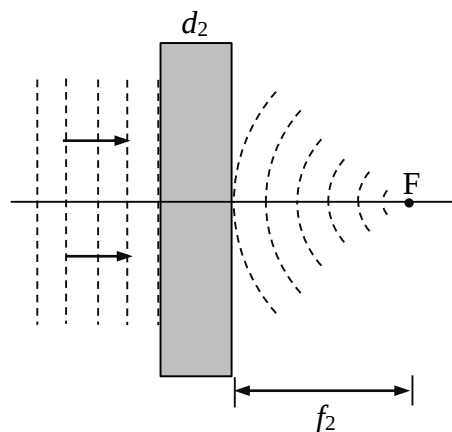


圖 7

$$I(r) \text{ W/cm}^2 = \begin{cases} 2.00 \times 10^{13} \times \left(-b + \sqrt{10^6 - r^2} \right), & \text{若 } r \leq 2.50 \text{ cm} \\ 0, & \text{若 } r > 2.50 \text{ cm} \end{cases}$$

式中 $b = \sqrt{10^6 - 2.50^2} \text{ cm}$ ，為一常數； r 為光束截面上距其中心點的徑向距離。已知該玻璃板的正常折射率 $n_0 = 1.66$ ，參數 $a = 5.00 \times 10^{-15} \text{ cm}^2/\text{W}$ 。應用惠更斯原理，解釋為何透出玻璃板的光波，將會聚於一點？並求出該玻璃板的焦距 f_2 為何？

六、 凡得瓦吸引作用下的原子力顯微術

原子力顯微術是利用一個探針，對物體表面的物理性質進行探測。當探針與物體表面距離為 5 nm 時，會感受到凡得瓦吸引力。此題僅考慮受到凡得瓦吸引力作用的原子力顯微系統。上述之系統可以簡化如圖 8 所示之一維簡諧振盪系統；其中探針的針尖簡化為一個半徑為 R_1 的球，懸臂上下移動改變針尖與樣品的距離 Z ，懸臂與探針的連結簡化為力常數為 k 的彈簧，而樣品表面視為一無限大的平整表面。當探針和樣品受到凡得瓦耳力作用時，探針會向下偏移 δ ，且與樣品的距離為 D 。也就是說，若針尖與樣品表面兩者間沒有凡得瓦耳力作用時，兩者的距離為 Z ，且 Z 等於 $\delta + D$ 。

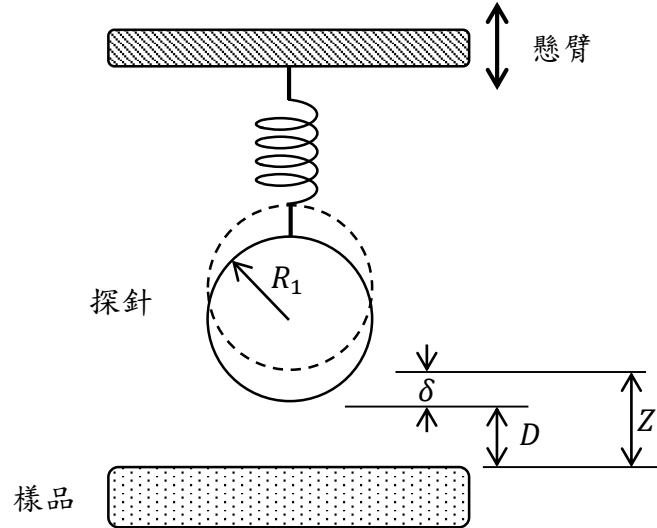


圖 8：原子力顯微系統簡化模型

首先考慮此一維簡諧振盪系統熱擾動問題。因為探針距離表面很近，約 5 nm，所以當在室溫操作時，不希望受到太大的熱擾動干擾，而造成量測的誤差。因此需要先在室溫實驗時，找出合適力常數 k 的探針。

(a) 若在室溫為 300K 時，期望測量的平均熱擾動誤差方均根值小於 0.1 nm，估算力常數 k 的最小值為何？

為了要探討探針與平面樣品間的作用，先假設樣品是一個半徑為 R_2 的球，當 $R_2 \gg R_1$ 的情況，即近似一個球型探針與一平整樣品的系統。如圖 9 所示，半徑各為 R_1 和 R_2 的兩實心球，表面相距為 D ，兩者間因為凡得瓦耳力作用的位能如下(1)式所示：

$$-\Gamma \left\{ \frac{2R_1R_2}{D^2 + 2DR_1 + 2DR_2} + \frac{2R_1R_2}{D^2 + 2DR_1 + 2DR_2 + 4R_1R_2} + \ln \frac{D^2 + 2DR_1 + 2DR_2}{D^2 + 2DR_1 + 2DR_2 + 4R_1R_2} \right\} \quad (1)$$

其中 Γ 為一探針與樣品材質的相關數值，試回答下列問題。

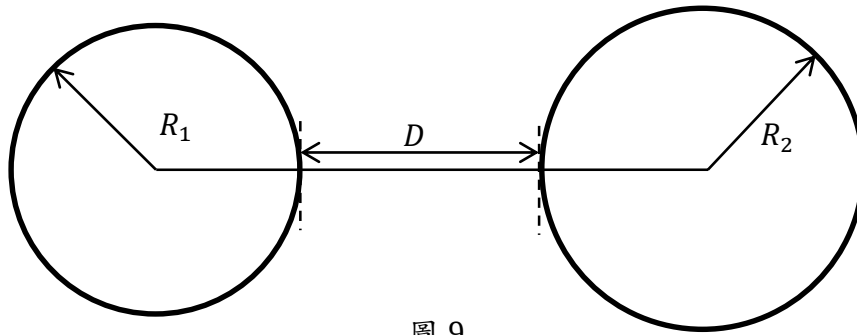


圖 9

- (b) 若 $\frac{R_2}{R_1} \rightarrow \infty$ ，且 $D \ll R_1$ 時，則圖 9 情況近似圖 8，而樣品表面為一平面，則(1)式之位能可以化簡為 $-\alpha \frac{R_1}{D}$ ，求 α 之表示式。
- (c) 由(b)知探針和一平整樣品系統間的凡得瓦力所造成的位能等於 $-\alpha \frac{R_1}{Z-\delta}$ ，當探針和一平整樣品維持力平衡時， δ 必須滿足方程式： $\delta^3 + a\delta^2 + b\delta + c = 0$ ，求 a 、 b 和 c 的表達式。(以 α 、 R_1 、 Z 和 k 表示之。)
- (d) 承(c)小題的討論，當探針與平整表面之距離 D 小於某一特定值 ℓ 時，探針會被因為凡得瓦力作用而被吸附於樣品的表面，請問 ℓ 為何？當 $D = \ell$ 時， δ 為何？(均以 α 、 R_1 、 Z 和 k 表示之。)
- (e) 已知實際的狀況下， $\alpha \sim 10^{-19} \text{J}$ ，探針的半徑約為 50 nm，利用(a)所得之 k ，計算 ℓ 的數值。