

2015年第16屆亞洲物理奧林匹亞競賽
及第46屆國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊複選考試

理論試題

2015年2月7日

考試時間：13:30-16:30，共三小時

<<注意事項>>

- 1、本試題共有計算題六大題，每題25分，合計150分。
- 2、各計算題請在答案卷上指定之位置作答，每大題答案卷二頁。
- 3、可使用無程式之掌上型計算器(含科學工程式計算機)。

可能用到之數學公式

$$1. \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad (t \text{ 為時間, } x \text{ 為任意物理量})$$

$$2. \frac{d}{dx} x^m = m \cdot x^{m-1}$$

$$3. \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$4. \text{當 } x \ll 1, \sin x \approx x$$

$$5. \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$6. \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

2015年第16屆亞洲物理及第46屆國際物理奧林匹亞競賽
國家代表隊複選考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

一、萬有引力

令太陽與地球的質量分別為 M_s 與 M_e ，地球的半徑為 r_e 。假設地球繞日運行的軌道為半徑 r_s 的圓(如圖 1 所示)，週期為 T 。考慮地球繞日的公轉運動，但忽略地球的自轉運動，利用表一數據，及重力常數 $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ，求出質量為 m 的質點在下列各題所述情況下的速率。

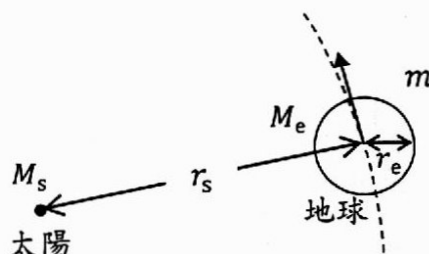


圖 1

注意：◎ 系統的總動量與總力學能均需守恆。

◎ 答案均須包括數值和用以計算數值的數學式，速率均以 km/s 為單位表示之。

◎ 除(d)題可做 $m \ll M_e$ 的近似外，數學式均須為精確解，不可作近似。

表一：太陽和地球質量，以及地球軌道半徑和半徑數據

太陽質量 M_s	地球質量 M_e	地球軌道半徑 r_s	地球半徑 r_e
$1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$	$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$	$6.37 \times 10^6 \text{ m}$

- 依據克卜勒的定律，求地球繞日運行的速率 v_0 (相對於太陽，並以 km/s 為單位表示之)。
- 只受到地球的重力作用，質點由地球表面可脫離地球重力束縛的最小速率 v_e (相對於地球) 為何？
(提示：脫離地球重力束縛時，質點與地球間的距離為無窮大。)
- 只受到太陽的重力作用，質點由距離太陽為 r_s (即地球軌道半徑) 的一點可脫離太陽重力束縛的最小速率 v_s (相對於太陽) 為何？
- 考慮太陽與地球的重力作用，當地球以速率 v_0 繞日運行時，質點由地球表面可脫離太陽重力束縛的最小速率 v (相對於地球) 約為何？答案的數學式以 v_e 、 v_s 、 v_0 表示，數值以 km/s 為單位。(假設太陽的質量為無窮大，而可視為靜止不動。)

二、圓筒面上的滾動與滑動

如右圖 2 所示，一半徑為 a 之半圓形圓筒置放在水平面上，另一半徑為 r 之小圓筒則自半圓形圓筒頂端 ($\theta = 0$) 滾落，若半圓形圓筒之質量為 M ，小圓筒之質量為 m ，相對中心軸的轉動慣量為 $I = \lambda mr^2$ ，小圓筒與半圓形圓筒間之靜摩擦係數與動摩擦係數各為 μ_s 和 μ_k 。試回答以下問題：

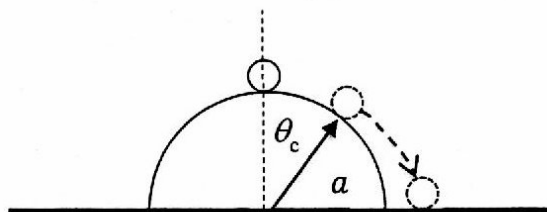


圖 2

- 假設半圓形圓筒是固定的，並且假設小圓筒在離開半圓形圓筒面前可以全程作純滾動運動，小圓筒在離開半圓形圓筒之角度 θ_c ，試求 $\cos \theta_c$ 。
- 接續(a)小題，假設半圓形圓筒可自由在水平面上滑動，並且半圓形圓筒與水平面間之摩擦可被忽略。若 $\lambda = 0.5$ ，且作純滾動運動之小圓筒離開半圓形圓筒之角度 θ_c 符合 $\cos \theta_c = 0.6$ ，試估算小圓筒質量與半圓形圓筒質量之比值 m/M 。
- 接續(a)小題，假設半圓形圓筒固定不動，檢驗小圓筒在離開半圓形圓筒面前可以全程作純滾動運動之假設，試問此假設若成立，靜摩擦係數 μ_s 所必須滿足的條件為何？一般物質的靜摩擦係數可以滿足此條件嗎？由此求出小圓筒開始滑動之角度 θ_s 的 $\cos \theta_s$ 值 (設 $\mu_s = 0.5$ ， $\lambda = 1$)。
- 接續(c)小題，假設動摩擦係數 μ_k 很小可被忽略，試估計在此情況下，小圓筒離開半圓形圓筒之角度 θ_c 的 $\cos \theta_c$ 值 (以 $\cos \theta_s$ 與 λ 表示)。

三、鉛蓄電池

假設汽車使用的鉛蓄電池，在充滿電時，電池內硫酸溶液的質量百分比濃度約為 35%。當溶液中解離的 H^+ 與 HSO_4^- 與電極物質產生化學反應時，產生電荷移轉，可使單一電池兩極間的總電動勢 $\mathcal{E}$ 固定為 2.0 伏特。已知通過的電流不大時，兩電極與硫酸溶液間的介面電阻可以忽略，且假設溶液中的離子分布均勻，而溶液的電導率 σ ，可用估計金屬電導率時所用的 Drude 模型計算。Drude 模型的正、負離子電導率表示式為：

$$\sigma_{\pm} = \frac{n_{\pm} q_{\pm}^2 \tau_{\pm}}{m_{\pm}}, \quad \sigma = \sigma_+ + \sigma_-$$

上式中的下標為 + 時是代表正離子，- 號代表負離子。若以 i 代表上式中的 + (正離子)、或 - (負離子)，則 σ_i 、 n_i 與 τ_i 分別代表 i 離子的電導率、粒子數密度與平均碰撞時間，而 q_i 與 m_i 則分別為每個 i 離子所帶的電荷與質量。以下假設 τ_i 為常數，不隨溶液濃度而變。

- 一個電池的電量 Q 指的是可與電極發生電化學反應的正離子的總電量。假設硫酸分子完全解離為 H^+ 與 HSO_4^- 離子，試估計一個充滿電的鉛蓄電池，當溶液的總質量為 1.0 kg 時，可提供的總電量 Q_0 為多少安培小時？

- (b) 若在充滿電時，一個鉛蓄電池中源自溶液的內電阻為 r_0 ，則當電池的電量為 Q 時，溶液的內電阻 r 為何？答案以 r_0 、 Q_0 、 Q 表示。
- (c) 若將電動勢 $\mathcal{E}$ 保持固定的鉛蓄電池，以不含電能供應組件的電路，與一個未帶電、電容固定為 C 的電容器連接，則當電路達穩定態(電流不再變化)時，鉛蓄電池減少的電能 ΔE 為何？電容器獲得的電能 E_C 為何？答案以 C 、 $\mathcal{E}$ 表示。
- (d) 若將電動勢固定為 $\mathcal{E}$ 、電量為 Q_1 、內電阻為 r_1 的鉛蓄電池，於 $t = 0$ 時外接一個電阻固定為 R 的電阻器，則此電池的電量下降到 Q_1/e (其中 $e = 2.71828$)所需的時間 T 為何？答案以 r_1 、 Q_1 、 R 、 $\mathcal{E}$ 表示。
- (e) 以(a)題中充滿電、且完全解離的電池為例，若串聯6個電池，並假設 $6r_0 \ll R$ ， $R = 50 \Omega$ ，則電池的電量下降到 Q_0/e (其中 $e = 2.71828$)所需的時間 T 為何？

【註】氫的原子量為1，氧的原子量為16，硫的原子量為32。

四、多層膜隔熱布

人造衛星及太空儀器的表面常包覆著一層光亮的隔熱布，其目的在使儀器的溫度保持在一定的範圍，不因受日照與否而大幅改變。常用的隔熱布是由多層的金屬薄膜構成，兩兩之間以網狀的聚脂纖維間隔開來(如圖3)。金屬膜在絕對溫度為 T 時，其表面每單位面積在每單位時間內所輻射出的電磁波能量(即輻射能通量)為 $J = e\sigma T^4$ ($\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$)，式中 e 為發射率， $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ ($\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}$)為斯特凡-波茲曼常數。若有外來的輻射能通量 J_{ext} 到達該表面時，將有 eJ_{ext} 被吸收、 $(1 - e)J_{\text{ext}}$ 被反射。假設金屬薄膜彼此平行，回答以下各小題：

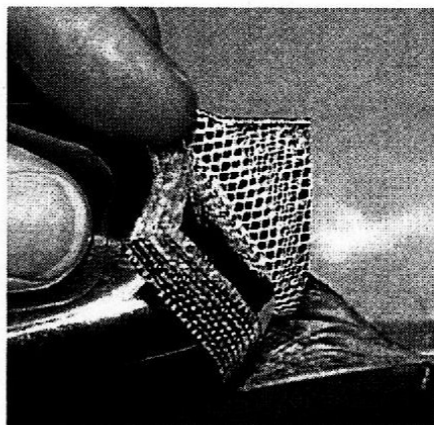


圖 3

- (a) 若僅有A、B兩層薄膜，溫度分別保持在 T_A 及絕對零度。求兩薄膜間一個平行截面上的總輻射能通量。
- (b) 接續(a)，若B薄膜的溫度保持在 $T_B > 0$ ，求兩薄膜間一個平行截面上的總輻射能通量。
- (c) 若隔熱布共有十一層薄膜(中間共有十個間隔)，最上層和最下層的溫度分別保持在 T_H 及 T_L ($T_H > T_L$)，當達到穩定態時(即各薄膜溫度皆不隨時間改變)，求兩兩之間平行截面上的輻射能通量。
- (d) 假設太陽為理想黑體，溫度為 T_S ，表面積為 a 。用上述的多層隔熱膜(共十一層膜)包覆某一距太陽 d 、質量為 M 、比熱為 C 、半徑為 r 的均質球形儀器(本身不發熱)，達穩定態時，該儀器的溫度 T_0 為何？
- (e) 接續(d)，若該儀器本身會發熱，功率為常數 P ，它和多層隔熱膜的最內層緊密接觸而保持同溫，則達穩定態時，多層隔熱膜最內層的溫度 T_{in} 及最外層的溫度 T_{out} 分別為多少？

五、陣列電磁波發射源

有 $2N$ 個電磁波發射源在 x 軸上以等間距 d 排列成一維的陣列，陣列的中心點在坐標原點 O 上，如圖 4 所示。設每一個發射源均以球面波向外發射角頻率為 ω 的電磁波，電磁波以光速 c 行進。以下問題只考慮在 xy 平面上，且與原點的距離遠大於 Nd 處之電磁波強度。

(a) 若所有發射源的相位均相同，而在遠處只有在 y 軸上能接收到最強的電磁波，則 d 的最大值為何？

(b) 已知 d 為(a)小題中允許的最大值，所有發射源的相位均相同，在偏離 y 軸方向 $\pm 4.8^\circ$ 的遠處，發現第一次完全收不到電磁波的角度，求 N 的數值。

(c) 已知 d 為(a)小題中允許的最大值，若相鄰兩波源的相位差(右波源相位減去左波源相位)為定值 ϕ (rad)。則在 $y \geq 0$ 平面上遠處，能接收到最強電磁波的方向與 $+y$ 軸的夾角 θ 為何？(在 $+y$ 軸與 $+x$ 軸之間的方向， θ 為正值。)

(d) 承(c)小題討論，若在 $x_n = (n - \frac{1}{2})d$ 處的發射源之角頻率為 $\omega_n = \omega + (n + \frac{1}{2})\Delta\omega$ ，此處 $n = -(N - 1), \dots, N$ ；而且每一個發射源的起始相位角均為 0 。若 $\Delta\omega \ll \omega$ ，在 $y \geq 0$ 平面遠處能接收到最強電磁波的方向和 $+y$ 軸的夾角 θ 與時間 t 的關係為何？遠處能接收到最強電磁波所涵蓋的角度的範圍為何？

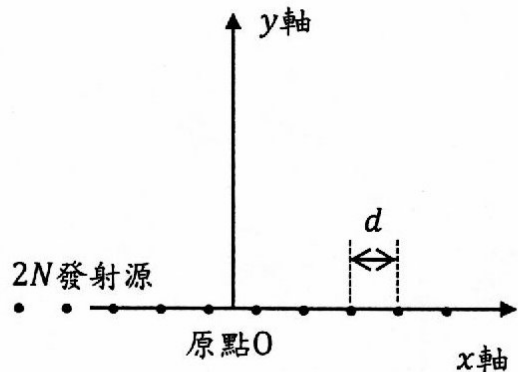


圖 4

六、保險絲

兩條互相平行長直導線置於傾角 θ 為 30° 斜面上，兩者間距為 30cm ，且其上端與一電阻 $R (= 0.25\Omega)$ 和一保險絲連結，二導線的下端則未連結，與斜面底邊垂直，如圖 5 所示。一質量為 m 之導體方柱以平行斜面底邊方式，橫跨接在二導線上，且以無摩擦方式沿斜面移動。導體方柱初始時靜止，並與電阻和保險絲之距離為 10cm 。一均勻磁場 $B (= 1.2\text{ T})$ ，方向垂直進入斜面。假設長直導

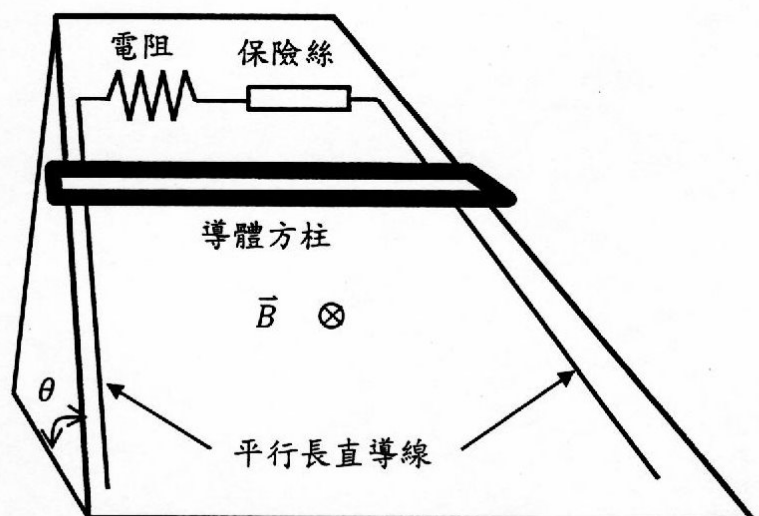


圖 5

線和導體柱的電阻可以忽略，且導體方柱運動中一直保持與導線接觸。已知當通過電流大於5A時，保險絲會瞬間斷裂。試回答下列問題：

(a) 導體方柱自靜止下滑，會使得保險絲斷裂，則導體方柱的最小質量為何？(設此過程中，保險絲電阻可忽略)

(b) 呈(a)小題，當導體方柱是最小質量時，保險絲斷裂的瞬間，導體方柱的速率為何？

若保險絲為一半徑為 r ，長度為 ℓ ($r \ll \ell$) 之實心圓柱體金屬所構成，且其電阻率為 ρ_f ，則

(c) 當保險絲內流有電流 I 時，其表面電場及磁場之方向和量值各為何？

(d) 波印廷向量(Poynting vector) $\vec{S}$ 的定義為 $\vec{S} \equiv \left(\frac{1}{\mu_0}\right) \vec{E} \times \vec{B}$ ，代表單位時間內流經

單位面積之電磁能 (其中 $\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$ ，為真空中的磁導率， $\vec{E}$ 為電

場， $\vec{B}$ 為磁場)，試求(c)中保險絲之波印廷向量 $\vec{S}$ 。

(e) 保險絲斷裂的主要原因是其溫度達到金屬的熔點所致，而當一物體的溫度為 T 時，根據斯特凡-波茲曼之黑體輻射定律，該物體向外輻射之功率可表為： $P = \sigma AT^4$ (其中 $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\cdot\text{K}^4$ ， A 為物體的表面積， T 是物體絕對溫度)。已知保險絲金屬的熔點為500 K，電阻率 $\rho_f = 120 \text{ n}\Omega\cdot\text{m}$ ，則欲使保險絲在載有5 A電流時熔融，其半徑為何？